Vlastnosti tříd grafů se zakázanými indukovanými podgrafy

Zdeněk Dvořák

14. listopadu 2016

1 Erdős-Hajnalova hypotéza

Definice 1. *Graf H má* EH vlastnost *jestliže existuje $\varepsilon(H) > 0$ takové, že každý graf G na n vrcholech obsahuje buď H jako indukovaný podgraf, nebo kliku či nezávislou množinu velikosti alespoň $n^{\varepsilon(H)}$.*

Poznámka: K_1, $2K_1$ a K_2 triviálně mají EH vlastnost.

Definice 2. *Nechť H je graf s k vrcholy a F_1, …, F_k jsou libovolné grafy. Graf $H(F_1, \ldots, F_k)$ je získaný z H nahrazením jeho vrcholů kopiemi F_1, …, F_k, přičemž z hran H vzniknou úplné bipartitní podgrafy. Jinak řečeno, $H(F_1, \ldots, F_k)$ je graf získaný z disjunktního sjednocení grafů F_1, …, F_k přidáním hran $\{uv : ij \in E(H), u \in V(F_i), v \in V(F_j)\}$.*

Poznámka: $2K_1(F_1, F_2)$ je disjunktní sjednocení F_1 a F_2. Dále, $K_2(F_1, F_2)$ je *úplné spojení* F_1 a F_2.

Vnoření grafu H v G je prostá funkce $f : V(H) \to V(G)$ taková, že f je isomorfismus mezi H a podgrafem G indukovaným oborem hodnot f.

Lemma 1 (Alon, Pach, Solymosi)**.** *Mají-li grafy H a F EH vlastnost, pak i graf $H(F, K_1, \ldots, K_1)$ má EH vlastnost.*

Důkaz. Nechť H má k vrcholů a $V(H) = \{v_1, \ldots, v_k\}$, kde v_k je vrchol, který nahrazujeme grafem F. Nechť $\delta := \frac{\varepsilon(F)}{\varepsilon(H)+k\varepsilon(F)}$. Ukážeme, že $H' = H(F, K_1, \ldots, K_1)$ má EH vlastnost s $\varepsilon(H') = \min\left(\delta\varepsilon(H), \frac{\delta}{\log_2 k}\right)$.

Uvažujme libovolný graf G s n vrcholy, a nechť $m = \lceil n^\delta \rceil$. Jestliže $m < k$, pak $n < k^{1/\delta}$ a $n^{\varepsilon(H')} < k^{\frac{\varepsilon(H')}{\delta}} = 2^{\frac{\varepsilon(H')\log_2 k}{\delta}} \le 2$; stačí tedy v G najít kliku či nezávislou množinu velikosti 2, která pro $n \ge 2$ vždy existuje. Můžeme tedy předpokládat, že $m \ge k$.

Uvažme libovolnou m-prvkovou podmnožinu $S \subseteq V(G)$. Má-li $G[S]$ kliku či nezávislou množinu velikosti alespoň $m^{\varepsilon(H)}$, pak G má kliku či nezávislou množinu velikosti alespoň $n^{\delta\varepsilon(H)} \geq n^{\varepsilon(H')}$. Můžeme tedy předpokládat, že tomu tak pro žádnou m-prvkovou podmnožinu S není. EH vlastnost grafu H pak implikuje, že $G[S]$ obsahuje H jako indukovaný podgraf, tedy že existuje vnoření f_S grafu H do G s oborem hodnot obsaženým v S.

Všimněme si, že je-li f vnoření H do G, pak $f = f_S$ pro nejvýše $\binom{n-k}{m-k}$ podmnožin S (těch, které obsahují obor hodnot f). Existuje ale $\binom{n}{m}$ podmnožin $V(G)$ velikosti m, a proto existuje alespoň

$$\frac{\binom{n}{m}}{\binom{n-k}{m-k}}$$

vnoření H do G. Počet prostých funkcí z $V(H) \setminus \{v_k\}$ do $V(G)$ je $n(n-1)\cdots(n-k+2)$, a proto existuje taková funkce f_0, kterou lze alespoň

$$M := \frac{\binom{n}{m}}{\binom{n-k}{m-k} n(n-1)\cdots(n-k+2)}$$

způsoby rozšířit na vnoření H do G. Jinak řečeno, existuje podmnožina $T \subseteq V(G)$ velikosti M taková, že pro každé $t \in T$ je funkce f_t definovaná jako $f_t(v_i) = f_0(v_i)$ pro $1 \leq i \leq k-1$ a $f_t(v_k) = t$ vnořením H do G.

Jestliže $G[T]$ obsahuje F jako indukovaný podgraf, pak G obsahuje H' jako indukovaný podgraf. Můžeme tedy předpokládat, že $G[T]$ neobsahuje F jako indukovaný podgraf. Nicméně

$$M = \frac{n-k+1}{m(m-1)\cdots(m-k+1)} \geq \frac{n}{m^k} \geq n^{1-k\delta},$$

a EH vlastnost F proto implikuje, že $G[T]$ (a tedy i G) má kliku či nezávislou množinu velikosti alespoň

$$M^{\varepsilon(F)} \geq n^{(1-k\delta)\varepsilon(F)} \geq n^{\delta\varepsilon(H)} \geq n^{\varepsilon(H')}.$$

$\square$

Důsledek 2. *Mají-li grafy H, $F_1, \ldots, F_k$ EH vlastnost, pak i graf $H(F_1, \ldots, F_k)$ má EH vlastnost.*

Důkaz. Plyne z lemma 1, jelikož vrcholy H můžeme podgrafy $F_1, \ldots, F_k$ nahrazovat postupně, tj. můžeme položit $H_0 = H$ a

$$H_{i+1} = H_i\big(\underbrace{K_1, \ldots, K_1}_{(k-i-1)\text{-krát}}, F_{k-i}, K_1, \ldots, K_1\big)$$

pro $0 \leq i \leq k-1$, a pak $H(F_1, \ldots, F_k) = H_k$. $\square$

2 Kografy

Definice 3. Kografy *jsou grafy vzniklé z kopií* K_1 *opakovanými operacemi disjunktního sjednocení a úplného spojení.*

Lemma 3. *Graf* G *je kograf právě tehdy, když* G *neobsahuje* P_4 *jako indukovaný podgraf.*

Důkaz. Disjunktním sjednocením ani úplným spojením nemůžeme vytvořit indukovaný podgraf P_4, jelikož P_4 i jeho doplněk je souvislý. Kografy tedy neobsahují P_4 jako indukovaný podgraf.

Opačnou implikaci dokážeme indukcí; předpokládejme tedy, že každý graf s méně než $|V(G)|$ vrcholy, který neobsahuje P_4 jako indukovaný podgraf, je kograf. Všechny grafy s nejvýše třemi vrcholy jsou kografy, a proto předpokládejme $|V(G)| \geq 4$.

Je-li G či doplněk G nesouvislý, pak G je disjunktním sjednocením či úplným spojením dvou grafů bez P_4, které jsou kografy z indukce, a tedy i G je kograf. Můžeme proto předpokládat, že G i doplněk G jsou souvislé.

Nechť v je libovolný vrchol v G. Z indukčního předpokladu je $G-v$ kograf, a jelikož $|V(G-v)| \geq 3$, graf $G-v$ je buď disjunktním sjednocením nebo úplným spojením nějakých kografů, a tedy buď $G-v$ nebo doplněk $G-v$ není souvislý. Uvažme případ, že $G-v$ není souvislý; případ, že doplněk $G-v$ není souvislý se vyřeší obdobně. Jelikož doplněk G je souvislý, vrchol v není univerzální, existuje tedy komponenta C grafu $G-v$ obsahující vrchol x nesousedící s v. Jelikož G je souvislý, v má souseda y v C, a dále souseda w v $G-(v \cup V(C))$. Zvolme vrcholy x a y v C s těmito vlastnostmi tak, že vzdálenost mezi x a y v C je nejmenší možná. Pak $xy \in E(G)$, a $xyvw$ je indukovaná cesta délky 4 v G. To je spor. $\square$

Pozorování 4. *Kografy jsou perfektní, tj. je-li* G *kograf, pak* $\chi(G) = \omega(G)$.

Pozorování 5. *Je-li* G *perfektní graf na* n *vrcholech, pak obsahuje kliku nebo nezávislou množinu velikosti alespoň* $\sqrt{n}$.

Důsledek 6. *Graf* P_4 *má EH vlastnost a* $\varepsilon(P_4) = \frac{1}{2}$. *Všechny grafy na nejvýše 4 vrcholech mají EH vlastnost.*