Opakování

Definice 1. *Nechť G je graf a $A, B \subset V(G)$ jsou neprázdné disjunktní podmnožiny jeho vrcholů. Pak*

- *$e(A, B)$ je počet hran v G s jedním koncem v A a druhým v B.*
- *$d(A, B) = \frac{e(A,B)}{|A||B|}$.*
- *(A, B) je ε-*regulární*, jestliže*

$$|d(X, Y) - d(A, B)| \leq \varepsilon$$

  pro každé $X \subseteq A$ a $Y \subseteq B$ tž. $|X| \geq \varepsilon|A|$ a $|Y| \geq \varepsilon|B|$.

Definice 2. *Nechť G je graf. Pak $V_0, V_1, \ldots, V_k$ je ε-*regulární rozklad *G, jestliže*

- *$V(G) = V_0 \cup V_1 \cup \ldots \cup V_k$,*
- *$V_i \cap V_j = \emptyset$ pro každé $0 \leq i < j \leq k$,*
- *$|V_0| \leq \varepsilon|V(G)|$,*
- *$|V_1| = |V_2| = \ldots = |V_k|$ a*
- *existuje nejvýše εk^2 dvojic i, j (kde $1 \leq i < j \leq k$) tž. (V_i, V_j) není ε-regulární pár.*

Věta 1 (Regularity Lemma)**.** *Pro každé $\varepsilon > 0$ a $m \geq 0$ existuje M tž. každý graf s alespoň m vrcholy má ε-regulární rozklad $V_0, V_1, \ldots, V_k$, kde $m \leq k \leq M$.*

Removal Lemma

Pozorování 2. *Nechť $1/2 > \varepsilon > 0$ a $d \geq 2\varepsilon$. Nechť A, B a C jsou disjunktní neprázdné množiny vrcholů v nějakém grafu G, $|A| = |B| = |C| = t$ a (A, B), (B, C) a (A, C) jsou ε-regulární páry tž. $d(A, B) \geq d$, $d(B, C) \geq d$ a $d(A, C) \geq d$. Pak G obsahuje alespoň $(1 - 2\varepsilon)(d - \varepsilon)^3 t^3$ trojúhelníků.*

Věta 3 (Removal Lemma)**.** *Pro každé $\alpha > 0$ existuje $\delta > 0$ a $n_0 > 0$ tž. každý graf G s $n \geq n_0$ vrcholy buď obsahuje alespoň δn^3 trojúhelníků, nebo existuje $X \subseteq E(G)$ velikosti nejvýše αn^2 tž. $G - X$ neobsahuje žádný trojúhelník.*

Erdős-Stoneova věta

Pozorování 4. *Je-li* (A, B) *ε-regulární pár a* $\varepsilon' \geq \varepsilon$*, pak* (A, B) *je i* ε'*-regulární pár.*

Pozorování 5. *Nechť* (A, B) *je ε-regulární pár s hustotou* $d = d(A, B) > \varepsilon$ *a* $|A| = |B| = t$*. Nechť* $X \subseteq A$ *a* $Y \subseteq B$ *splňují* $|X| = |Y| = t' \geq \varepsilon t$*. Pak* (X, Y) *je* $\left(\max(2, \frac{t}{t'})\varepsilon\right)$*-regulární pár s hustotou* $d(X, Y) \geq d - \varepsilon$*.*

Pro přirozená čísla $\chi, h \geq 1$ a reálné číslo d $(0 < d \leq 1)$ definujme $\varepsilon(\chi, h, d)$ a $t_0(\chi, h, d)$ takto:

- $\varepsilon(\chi, 1, d) = 1$, $t_0(\chi, 1, d) = 1$
- $\varepsilon(\chi, h, d) = \min\left(\frac{1}{\chi}, \frac{d}{2}\varepsilon(\chi, h-1, d/2)\right)$
- $t_0(\chi, h, d) = \frac{2}{d}t_0(\chi, h-1, d/2)$

Lemma 6. *Nechť* $\chi, h \geq 1$ *jsou přirozená čísla a* $0 < d \leq 1$*. Položme* $\varepsilon = \varepsilon(\chi, h, d)$ *a* $t_0 = t_0(\chi, h, d)$*. Nechť* G *je graf a* $A_1, \ldots, A_\chi \subset V(G)$ *jsou disjunktní množiny velikosti* $|A_1| = \ldots = |A_\chi| \geq t_0$ *tž.* (A_i, A_j) *je ε-regulární pár a* $d(A_i, A_j) \geq d$ *pro* $1 \leq i < j \leq \chi$*. Jestliže* H *je graf barevnosti nejvýše* χ *a* $|V(H)| = h$*, pak* H *je podgraf* G*.*

Připomeňme:

Věta 7 (Turán)**.** *Má-li graf na* n *vrcholech více než* $\left(1 - \frac{1}{k-1}\right)\frac{n^2}{2}$ *hran, pak obsahuje* K_k *jako podgraf.*

Věta 8 (Erdős, Stone)**.** *Pro každý graf* H *barevnosti* $\chi \geq 2$ *a pro každé* $\alpha > 0$ *existuje* n_0 *tž. každý graf na* $n \geq n_0$ *vrcholech s alespoň* $\left(1 - \frac{1}{\chi-1} + \alpha\right)\frac{n^2}{2}$ *hranami obsahuje* H *jako podgraf.*

Erdős-Burrova hypotéza

Hypotéza 1 (Erdős, Burr)**.** *Pro každé* $p > 0$ *existuje* $c_p > 0$ *tž. pro každé* $h \geq 0$ *a pro každý **p-degenerovaný** graf* H *s* h *vrcholy, každé obarvení hran úplného grafu s alespoň* $c_p n$ *vrcholy dvěma barvami obsahuje monochromatické* H*.*

Věta 9 (Chvátal, Rödl, Szemerédi, Trotter)**.** *Pro každé* $p > 0$ *existuje* $c_p > 0$ *tž. pro každé* $h \geq 0$ *a pro každý graf* H *s* h *vrcholy a **maximálním stupněm nejvýše p**, každé obarvení hran úplného grafu s alespoň* $c_p n$ *vrcholy dvěma barvami obsahuje monochromatické* H*.*

Pozorování 10. *Nechť* (A, B) *je* ε*-regulární pár hustoty* d *v grafu* G*. Pak* (A, B) *je* ε*-regulární pár hustoty* $1 - d$ *v doplňku grafu* G*.*

Lemma 11. *Pro každé* $p > 0$ *existují* $\varepsilon > 0$ *a* $b > 0$ *tak, že platí následující. Nechť* H *je graf s* h *vrcholy a maximálním stupněm nejvýše* p*. Nechť* G *je graf a* $A_1, \ldots, A_{p+1} \subset V(G)$ *jsou disjunktní množiny velikosti* $|A_1| = \ldots = |A_{p+1}| \geq bh$ *tž.* (A_i, A_j) *je* ε*-regulární pár a* $d(A_i, A_j) \geq 1/2$ *pro* $1 \leq i < j \leq p + 1$*. Pak* H *je podgraf* G*.*