Bodované domácí úkoly – druhá série

Čísla v rámečku udávají bodové ohodnocení.

1. Vyšetřete stejnoměrnou a lokálně stejnoměrnou konvergenci následujících posloupností funkcí.
   - $\boxed{1}$ (a) $f_n(x) = \frac{\sin(nx)}{n}$, pro $x \in \mathbb{R}$.
   - $\boxed{1}$ (b) $f_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}}$, pro $x \in \mathbb{R}$.
   - $\boxed{1}$ (c) $f_n(x) = \sin(\frac{x}{n})$, pro $x \in \mathbb{R}$.
   - $\boxed{1}$ (d) $f_n(x) = n\left(\sqrt{x + \frac{1}{n}} - \sqrt{x}\right)$, pro $x \in (0, +\infty)$.

2. Následující čtyři podpříklady na sebe navazují, ovšem poslední podpříklad je možné vyřešit i samostatně.
   - $\boxed{1}$ (a) Určete poloměr konvergence mocninné řady
   $$\sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}.$$
   - $\boxed{1}$ (b) Sečtěte mocninnou řadu z podpříkladu 2a. (Můžete postupovat například tak, že nejdřív sečtete její derivaci, a pak k výslednému součtu najdete primitivní funkci. V tom případě nezapomeňte určit správnou integrační konstantu u primitivní funkce.)
   - $\boxed{1}$ (c) Pomocí Abelovy věty a výsledku podpříkladu 2b určete součet řady $\sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{2n+1}$. (Nezapomeňte ověřit předpoklady věty.)
   - $\boxed{1}$ (d) Ukažte, že výsledek z podpříkladu 2c lze také odvodit tak, že se uváží Fourierova řada funkce $f(x) = x$ definované na $[-\pi, \pi]$ a spočítá se součet této řady v bodě $x = \pi/2$. (Nezapomeňte zdůvodnit, že Fourierova řada v tomto bodě konverguje k $f(\pi/2)$.)

3. $\boxed{1}$ Spočítejte Fourierovu řadu funkce $f(x) = x^2$ definované na intervalu $[-\pi, \pi]$. Ve kterých bodech konverguje tato řada k $f(x)$? Jaké vztahy lze odvodit dosazením $x = 0$ a $x = \pi$?