Bodované domácí úkoly — 8. série

Vyřešné příklady dodejte nejpozději do začátku cvičení v pátek 20. dubna 2007.

$\boxed{3+1}$ 1. Ukažte, že pro každé liché $n \geq 1$ existuje graf na n vrcholech, jehož všechny vrcholy mají stupeň aspoň $\frac{n-1}{2}$ a který neobsahuje hamiltonovskou kružnici (3 body). Může takový graf existovat i pro sudé n? (1 bod).

$\boxed{3}$ 2. Ukažte, že pro každé $n \geq 6$ existuje graf na n vrcholech, který má dva vrcholy stupně 2 a zbylých $n-2$ vrcholů má stupeň aspoň $\frac{n}{2}$, a přitom G neobsahuje hamiltonovskou kružnici.

$\boxed{2}$ 3. Najděte graf, který obsahuje dvě hranově disjunktní hamiltonovské cesty, ale neobsahuje hamiltonovskou kružnici.

$\boxed{2}$ 4. Najděte graf G s aspoň deseti vrcholy, ve kterém pro každé dva nesousední vrcholy x, y existuje hamiltonovská cesta z x do y, a přitom G nemá hamiltonovskou kružnici.

$\boxed{4}$ 5. *Hyperkrychle dimenze d* je graf definovaný následovně: vrcholy grafu jsou právě všechny posloupnosti délky d tvořené číslicemi 0 a 1 (takže graf má přesně 2^d vrcholů) a dva vrcholy jsou spojené hranou, pokud se příslušné posloupnosti liší v právě jednom členu (takže každý vrchol má přesně d sousedů). Dokažte, že pro každé $d \geq 2$ je hyperkrychle dimenze d hamiltonovská.

$\boxed{2+2}$ 6. Nechť $G = (V, E_G)$ je graf, který má tisíc vrcholů a každý jeho vrchol má stupeň aspoň 500. Nechť H je graf, který vznikl z G vymazáním sto hran (tj. $H = (V, E_H)$, kde $E_H \subseteq E_G$ a $|E_G \setminus E_H| = 100$). Dokažte, že H obsahuje hamiltonovskou kružnici (2 body). Dokažte, že G obsahuje aspoň sto hamiltonovských kružnic (2 body).