Druhá sada domácích úkolů

Příklad 1. (2 body) Najděte množinu M kladných reálných čísel, pro kterou bude platit výrok

$$\forall x \in M \ \exists y \in M \colon y < x,$$

ale nebude platit výrok

$$\forall y \in M \ \exists x \in M \colon y < x.$$

Příklad 2. (2 body) Najděte posloupnost reálných čísel $a_1, a_2, \ldots,$ pro kterou bude platit

$$\forall i \in \mathbb{N} \ \exists j \in \mathbb{N} \colon a_i < a_j,$$

ale nebude platit

$$\forall x \in \mathbb{R} \ \exists j \in \mathbb{N} \colon x < a_j.$$

Příklad 3. (3 body) Symbolem (x, y) označme otevřený interval od x do y. Najděte množinu M reálných čísel, pro kerou bude platit výrok

$$\forall x \in M \ \forall y \in M \colon \Big(y > x \Rightarrow \exists z \in M \colon z \in (x, y)\Big),$$

ale nebude platit výrok

$$\forall x \in M \ \forall y \in \mathbb{R} \colon \Big(y > x \Rightarrow \exists z \in M \colon z \in (x, y)\Big).$$

Příklad 4. (3 body) Symbolem $\mathbb{R}^+$ označme množinu všech kladných reálných čísel. Najděte reálnou funkci f, pro kterou bude platit

$$\forall x \in \mathbb{R} \ \exists \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \colon f(x+1) \geq f(x) + \varepsilon,$$

ale nebude platit

$$\exists \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \ \forall x \in \mathbb{R} \colon f(x+1) \geq f(x) + \varepsilon.$$

Příklad 5. (3 body) Najděte posloupnost $a_1, a_2, \ldots$ reálných čísel, pro kterou výrok

$$\forall i \in \mathbb{N} \ \exists j \in \mathbb{N} \ \forall k \in \mathbb{N} \colon (k \geq j \Rightarrow a_k \geq a_i)$$

bude pravdivý, ovšem výrok

$$\exists i \in \mathbb{N} \ \forall k \in \mathbb{N} \colon (k \geq i \Rightarrow a_k \geq a_i)$$

nebude pravdivý.

Příklad 6. Dokažte následující tvrzení. (2 body za každý důkaz)

1. $\forall n \in \mathbb{N} \colon \sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$
2. $\forall n \in \mathbb{N} \colon \sum_{k=1}^{n} \frac{2k+1}{k^2(k+1)^2} = 1 - \frac{1}{(n+1)^2}$
3. Definujme posloupnost $a_1, a_2, \ldots$ následovně: $a_0 = 1$, $a_1 = 3$, a pro $n \geq 2$ platí $a_n = a_{n-1} + 6a_{n-2}$. Dokažte že pro $n \geq 0$ platí $a_n = 3^n$.
4. Definujme posloupnost $a_1, a_2, \ldots$ následovně: $a_0 = 1$, $a_1 = 3$, a pro $n \geq 2$ platí $a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2}$. Dokažte že pro $n \geq 0$ platí $a_n \leq 2^n$.
5. Pro každé přirozené číslo $k \geq 3$ a pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí, že $k^n - 1$ je násobek $k - 1$.
6. $\forall n \in \mathbb{N} \colon \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \leq 2 - \frac{1}{n}$
7. $\forall n \geq 2 \colon \prod_{k=2}^{n} \left(1 - \frac{1}{k^2}\right) = \frac{n+1}{2n}$

Příklad 7. (3 body) Nechť F_n označuje n-té Fibonacciho číslo. Dokažte, že existuje přesně F_{n+1} způsobů, jak vyjít n schodů, jestliže v každém kroku vyjdeme buď o jeden nebo o dva schody výš. (Například pro $n = 3$ máme celkem tři možnosti: buď uděláme tři kroky, a v každém kroku vyjdeme o jeden schod výše, nebo v prvním kroku vyjdeme o dva schody výš a ve druhém o jeden schod výš, nebo v prvním kroku vyjdeme jeden a ve druhém dva schody.)

Příklad 8. (4 body) Nechť F_n opět označuje n-té Fibonacciho číslo. Dokažte, že existuje přesně F_n způsobů, jak lze číslo n zapsat jako součet lichých čísel. (Například pro $n = 5$ máme $F_5 = 5$ možností: $1 + 1 + 1 + 1 + 1$; $3 + 1 + 1$; $1 + 3 + 1$; $1 + 1 + 3$; 5.)

Příklad 9. (3 body) Nechť T je zakořeněný strom, v němž každý vrchol má nejvýš tři potomky. Navíc platí, že každý vrchol T, který má dva různé sourozence, má právě jednoho potomka. Symbolem $h(T)$ označme hloubku stromu T, tj. počet hran na nejdelší cestě z kořene do listu. Symbolem $\ell(T)$ označme počet listů stromu T. Dokažte, že platí $\ell(T) \leq 2^{h(T)}$.

Příklad 10. (2 body za každou implikaci) Nechť d je přirozené číslo. Dokažte, že rovnice

$$\sum_{j=0}^{d} x^d = 0$$

má racionální řešení, právě když číslo d je liché.