

Jméno:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	Σ

Zkoušková písemka z Matematické analýzy I
10. 7. 2020

Čas: 2 hodiny.

Není povoleno používat kalkulačky a jinou elektroniku ani přinesené písemné materiály. Tvrzení z přednášky můžete používat bez důkazu, pokud není uvedeno jinak, nicméně je nutno uvést, které tvrzení používáte. Všechna ostatní tvrzení dokažte.

- (5 bodů) Napište definici pojmu *hromadný bod* posloupnosti reálných čísel.
- (10 bodů) Dokažte, že množina hromadných bodů libovolné posloupnosti reálných čísel má největší prvek v \mathbb{R}^* .
- (10 bodů) Nechť $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ je funkce. Pro následující dva výroky rozhodněte, jestli některý z nich implikuje ten druhý. Pro každou ze dvou možných implikací najděte buď důkaz, nebo protipříklad.
 - $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$.
 - Pro posloupnost $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ definovanou vztahem $a_n = f(\frac{1}{n})$ platí $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$.
- (5 bodů) Spočítejte limitu $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) \ln(1-x) \cos(x)}{\sin^2(x) \exp(x)}$.
- (10 bodů) Zformulujte a dokažte Darbouxovu větu o nabývání mezíhodnot.
- (10 bodů) Definujme funkci $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ takto:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{pro } x \in \mathbb{Q} \\ -x^2 & \text{pro } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

Je f spojitá v bodě $x = 0$? Má v tomto bodě derivaci? Pokud ano, čemu se rovná $f'(0)$?

- (15 bodů) Vyšetřete průběh funkce $f(x) = (x - 1)^3(x + 2)$: určete definiční obor, obor hodnot, maximální intervaly monotonie, lokální i globální extrémy a maximální intervaly konvexity a konkávnosti. Na základě těchto poznatků načrtněte graf funkce.
- (10 bodů) Nechť f je spojitá funkce na intervalu $[a, b]$. Dokažte, že existuje $c \in (a, b)$ splňující

$$f(c) = \frac{(N) \int_a^b f(x) dx}{b - a}.$$

- (5 bodů) Zformulujte integrální kritérium pro konvergenci řad. Nemusíte ho dokazovat.