Jméno:

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | $\sum$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | | | | |

---

# Zkoušková písemka z Matematické analýzy I

7. 7. 2020

---

Čas: 2 hodiny.

*Není povoleno používat kalkulačky a jinou elektroniku ani přinesené písemné materiály. Tvrzení z přednášky můžete používat bez důkazu, pokud není uvedeno jinak, nicméně je nutno uvést, které tvrzení používáte. Všechna ostatní tvrzení dokažte.*

1. *(5 bodů)* Napište definici pojmu *hromadný bod* posloupnosti čísel.
2. *(10 bodů)* Dokažte, že pokud má posloupnost čísel $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ právě jeden hromadný bod, tak je tento hromadný bod limitou posloupnosti $(a_n)_{n=0}^{\infty}$.
3. *(10 bodů)* Nechť $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ je posloupnost. Pro následující dva výroky rozhodněte, jestli některý z nich implikuje ten druhý. Pro každou ze dvou možných implikací najděte buď důkaz, nebo protipříklad.
   (i) Posloupnost $(a_n)$ je omezená.
   (ii) Existuje číslo $K \in \mathbb{R}$ takové, že pro každé $m \in \mathbb{N}$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \geq n_0$ platí $|a_n - a_m| < K$.
4. *(5 bodů)* Zformulujte větu o limitě složené funkce. Tu větu nemusíte dokazovat.
5. *(15 bodů)* Vyšetřete průběh funkce $f(x) = x^3(2-3x)$: určete definiční obor, obor hodnot, intervaly monotonie, lokální i globální extrémy a intervaly konvexity a konkávnosti. Na základě těchto poznatků načrtněte graf funkce.
6. *(10 bodů)* Nechť $f$ a $g$ jsou spojité funkce na intervalu $(0,1)$. Definujme na intervalu $(0,1)$ funkci $h$ předpisem $h(x) := \max\{f(x), g(x)\}$. Dokažte, že i funkce $h$ je na intervalu $(0,1)$ spojitá.
7. *(10 bodů)* Nechť $f$ je funkce, jejíž Taylorův polynom řádu 2 v bodě $b = 1$ má tvar $T(x) = 1 + 3(x-1) + 5(x-1)^2$. Definujme funkci $g(x) = \cos(f(x))$. Najděte Taylorův polynom řádu 2 funkce $g$ v bodě $b = 1$.
8. *(10 bodů)* Dokažte větu, která říká, že funkce $f\colon I \to \mathbb{R}$, která má na intervalu $I$ primitivní funkci, má na tomto intervalu Darbouxovu vlastnost (tj. vlastnost nabývání mezihodnot).
9. *(5 bodů)* Spočítejte, čemu se rovná $\int_0^1 \cos(e^x)e^x\,dx$.