

Jméno:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	$\Sigma$

---

Zkoušková písemka z Matematické analýzy I  
2. 7. 2020

---

Čas: 2 hodiny.

*Není povoleno používat kalkulačky a jinou elektroniku ani přinesené písemné materiály. Tvzení z přednášky můžete používat bez důkazu, pokud není uvedeno jinak, nicméně je nutno uvést, které tvzení používáte. Všechna ostatní tvzení dokažte.*

- (10 bodů) Dokažte, že každá posloupnost čísel má monotónní podposloupnost.
- (5 bodů) Najděte limitu posloupnosti  $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ , definované vztahem

$$a_n = n^2 \ln \left( 1 + \frac{1}{n^2} \right),$$

případně dokažte, že limita neexistuje.

- (10 bodů) Necht  $(a_n)_{n=0}^{\infty}$  a  $(b_n)_{n=0}^{\infty}$  jsou dvě posloupnosti nezáporných čísel. Předpokládejme, že obě řady  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  a  $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$  jsou konvergentní. Definujme posloupnost  $(c_n)_{n=0}^{\infty}$  předpisem  $c_n = \max\{a_n, b_n\}$  pro každé  $n$ . Dokažte, že řada  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$  je konvergentní.
- (10 bodů) Definujme funkci  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  následovně:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\exp(x) - \sin(x) - 1}{x} & \text{pro } x > 0 \\ 0 & \text{pro } x \leq 0. \end{cases}$$

Rozhodněte, zda je tato funkce spojitá v bodě  $x = 0$  a zda má v tomto bodě derivaci. Má-li v nule derivaci, určete její hodnotu.

- (10 bodů) Necht  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  je funkce. Pro následující dva výroky rozhodněte, jestli některý z nich implikuje ten druhý. Pro každou ze dvou možných implikací najděte buď důkaz, nebo protipříklad.
  - Funkce  $f$  je shora neomezená.
  - Pro každé  $x \in \mathbb{R}$  existuje  $y \in \mathbb{R}$  takové, že  $f(x) < f(y)$ .
- (5 bodů) Napište definici pojmu *konvexní funkce* (na intervalu  $I$ ).
- (10 bodů) Zformulujte a dokažte “druhou základní větu analýzy” o souvislosti Riemannova a Newtonova integrálu.
- (5 bodů) Napište vzorec, jímž lze pomocí integrálu definovat povrch rotační plochy vzniklé rotací grafu funkce  $f$  na intervalu  $[a, b]$  kolem osy  $x$ .
- (15 bodů) *Válec výšky  $h$  s poloměrem  $r$*  je rotační těleso, které vznikne rotací obdélníku s vrcholy o souřadnicích  $(0, 0)$ ,  $(r, 0)$ ,  $(0, h)$  a  $(r, h)$  kolem osy  $y$ . Odvoďte vzorec pro objem tohoto válce. *Povrch* tohoto válce se získá tak, že se sečte povrch jeho pláště (což je rotační plocha vzniklá rotací úsečky s koncovými vrcholy  $(r, 0)$  a  $(r, h)$  kolem osy  $y$ ) a povrch jeho dvou podstav (což jsou kruhy o poloměru  $r$  kolmé k ose  $y$  a se středy v bodech  $(0, 0)$  a  $(0, h)$ ). Najděte hodnoty  $r$  a  $h$  takové, že výsledný válec bude mít objem roven 1 a jeho povrch bude co nejmenší.