Jméno:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	$\sum$

Zkoušková písemka z Matematické analýzy I
23. 6. 2020

Čas: 2 hodiny.

Není povoleno používat kalkulačky a jinou elektroniku ani přinesené písemné materiály. Tvrzení z přednášky můžete používat bez důkazu, pokud není uvedeno jinak, nicméně je nutno uvést, které tvrzení používáte. Všechna ostatní tvrzení dokažte.

1. *(5 bodů)* Napište definici pojmu *limes inferior* posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$.
2. *(10 bodů)* Nechť $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost reálných čísel. Pro následující dva výroky rozhodněte, jestli některý z nich implikuje ten druhý. Pro každou ze dvou možných implikací najděte buď důkaz, nebo protipříklad.
   (i) Posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ nemá vlastní ani nevlastní limitu.
   (ii) Posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ má dvě podposloupnosti $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ a $(c_n)_{n=1}^{\infty}$ splňující $\lim_{n\to\infty} b_n = B$ a $\lim_{n\to\infty} c_n = C$, kde B a C jsou dva různé prvky $\mathbb{R}^*$.
3. *(10 bodů)* Nechť $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je rostoucí funkce. Dokažte, že pro každé $b \in \mathbb{R}$ má funkce f v bodě b jednostrannou limitu $\lim_{x\to b+} f(x)$.
4. *(5 bodů)* Zformulujte větu popisující souvislost mezi derivací funkce f a derivací funkce $f^{<-1>}$, která je inverzní k f. Nemusíte tu větu dokazovat.
5. *(10 bodů)* Definujme funkci $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ následovně:
$$f(x) = \begin{cases} \frac{\cos(x)-1}{x} & \text{pro } x > 0 \\ 0 & \text{pro } x \leq 0. \end{cases}$$
   Rozhodněte, zda je tato funkce spojitá v bodě $x = 0$ a zda má v tomto bodě derivaci. Má-li v nule derivaci, určete její hodnotu.
6. *(5 bodů)* Najděte primitivní funkci k funkci $f(x) = \exp(\sin^2(x))\sin(x)\cos(x)$.
7. *(10 bodů)* Zformulujte a dokažte "první základní větu analýzy" o souvislosti mezi Riemanovým integrálem a primitivní funkcí.
8. *(10 bodů)* Nechť funkce $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ je na intervalu $[0,1]$ nezáporná a má tam spojitou derivaci. Předpokládejme, že rotační plocha vzniklá otáčením grafu funkce f na intervalu $[0,1]$ kolem osy x má povrch 1. Na intervalu $[0,3]$ definujeme funkci g předpisem $g(x) = 3f(\frac{x}{3})$. Lze z těchto informací odvodit povrch rotační plochy vzniklé otáčením grafu funkce g na intervalu $[0,3]$ kolem osy x? Pokud ano, jaký ten povrch bude?
9. *(15 bodů)* Nechť c je reálná konstanta. Definujme posloupnost $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ následovně:
$$\begin{aligned} a_0 &= c \\ a_n &= a_{n-1} + (4 - a_{n-1})^2 \quad \text{pro } n \geq 1 \end{aligned}$$
   V závislosti na hodnotě c zjistěte, zda je tato posloupnost monotónní, zda je omezená a zda má limitu, případně čemu se ta limita rovná. Zdá-li se vám těžké vyřešit obecný případ, vyřešte aspoň případy $c = 0$, $c = 4$ a $c = \frac{7}{2}$. Za to dostanete částečné body.