Jméno:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	$\sum$

Zkoušková písemka z Matematické analýzy I

15. 6. 2020

Čas: 2 hodiny.

Není povoleno používat kalkulačky a jinou elektroniku ani přinesené písemné materiály. Tvrzení z přednášky můžete používat bez důkazu, pokud není uvedeno jinak, nicméně je nutno uvést, které tvrzení používáte. Všechna ostatní tvrzení dokažte.

1. *(10 bodů)* Nechť $M \subseteq \mathbb{R}$ je množina a nechť s je reálné číslo. Rozhodněte a zdůvodněte, zda některý z následujících dvou výroků implikuje ten druhý. O každé ze dvou možných implikací dokažte, že platí, nebo uveďte protipříklad.
   (i) Číslo s je supremum množiny M.
   (ii) Pro každé $y \in M$ platí, že pokud $y < s$, tak polootevřený interval $(y, s]$ obsahuje aspoň jeden prvek M.
2. *(10 bodů)* Dokažte, že každá posloupnost čísel má monotónní podposloupnost.
3. *(5 bodů)* Napište definici pojmu *limes superior* posloupnosti čísel.
4. *(15 bodů)* Nechť c je reálná konstanta a nechť (a_n) je posloupnost splňující $a_0 = c$ a pro $n \geq 1$ platí $a_n = a_{n-1} + (a_{n-1} - 3)^2$. V závislosti na hodnotě konstanty c rozhodněte, zda má tato posloupnost limitu a případně čemu se ta limita rovná.
5. *(10 bodů)* Nechť $c > 0$ je nějaká kladná konstanta. Nechť $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je funkce, která pro každé dva různé body $a, b \in \mathbb{R}$ splňuje
   $$\frac{|f(a) - f(b)|}{|a - b|} \leq c.$$
   Dokažte, že f je na $\mathbb{R}$ spojitá.
6. *(10 bodů)* Nechť f a g jsou dvě neklesající konvexní funkce na $\mathbb{R}$. Dokažte, že jejich složení $h(x) = f(g(x))$ je také neklesající konvexní funkce. (Neumíte-li dokázat tvrzení v plné obecnosti, dokažte ho aspoň za předpokladu, že f i g mají v každém bodě vlastní první i druhou derivaci. Za to dostanete 8 bodů.)
7. *(5 bodů)* Nechť c je libovolné reálné číslo. Najděte primitivní funkci k funkci $f(x) = x^c \ln(x)$. (Dejte pozor, abyste našli řešení pro opravdu všechna $c \in \mathbb{R}$.)
8. *(10 bodů)* Zformulujte a dokažte "první základní větu analýzy" o souvislosti mezi Riemannovým integrálem a primitivní funkcí.
9. *(5 bodů)* Uveďte příklad funkce $f\colon [0, 1] \to \mathbb{R}$, která je na intervalu $[0, 1]$ newtonovsky integrovatelná, ale není na tomto intervalu riemannovsky integrovatelná. Zdůvodněte, proč má vaše funkce tyto vlastnosti.