

Třetí série domácích úkolů z Kombinatoriky a grafů II

Řešení odevzdejte nejpozději na cvičení 10. ledna.

Příklad 1. Necht $G = (V, E)$ je rovinný multigraf s daným nakreslením a necht $G^* = (V^*, E^*)$ je jeho rovinný duál, tj. multigraf, jehož vrcholy odpovídají stěnám G , a ke každé hraně $e \in E$ je v E^* duální hrana e^* , které spojuje stěny incidentní s e . Na cvičení jsme si kdysi rozmysleli, že e je most, právě když e^* je smyčka, že e je smyčka, právě když e^* je most, a dále že platí $(G/e)^* = G^* - e^*$ a $(G - e)^* = G^*/e^*$. Dokažte, že platí $T_G(x, y) = T_{G^*}(y, x)$ [2 body]. (Výše uvedené vlastnosti dokázané na cvičení už znovu dokazovat nemusíte.)

Příklad 2. Necht G je multigraf, který má Tutteův polynom

$$T_G(x, y) = x^5 + 2x^4 + 2x^3y + x^3 + 2x^2y + xy^2.$$

Ukažte, jak lze z tohoto polynomu odvodit následující informace o grafu G :

- počet hran G [2 body]
- vrcholová barevnost G [2 body]
- počet koster G , jestliže předpokládáme, že je souvislý [1 bod]

Příklad 3. Označme S množinu všech slov konečné délky, která lze získat libovolným zřetězením slabik BA, GRA a KOM, přičemž stejná slabika se může ve slově použít i vícrát. Necht s_n je počet slov délky n v S . Například $s_4 = 1$ (BABA) a $s_5 = 4$ (BAGRA, GRABA, BAKOM, KOMBA). Označme dále $s_{n,k}$ počet slov délky n v S , v nichž se přesně k -krát vyskytuje písmeno A. Najděte vzorec pro mocninnou řadu $S(x, y) = \sum_{n,k=0}^{\infty} s_{n,k} x^n y^k$ [4 body]. Zdá-li se vám to příliš těžké, najděte aspoň vzorec pro mocninnou řadu $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} s_n x^n$, za to dostanete 2 body.

Příklad 4. Mějme dvě různé rovnoběžné přímky p a q . Necht $U = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ je množina n úseček, z nichž každá má jeden koncový bod na p a druhý na q . Předpokládejme pro jednoduchost, že všechny koncové body těchto úseček jsou navzájem různé. Necht G je průnikový graf množiny U ; jinými slovy, vrcholy G odpovídají úsečkám u_1, \dots, u_n , přičemž dva vrcholy jsou spojené hranou, právě když se příslušné dvě úsečky protínají (viz ilustrace na následujícím obrázku). Dokažte, že graf G je perfektní [2 body].

