První série domácích úkolů z Kombinatoriky a grafů II
(verze pro pondělní cvičení)

Vyřešené příklady odevzdávejte buď mailem na adresu jelinek@iuuk.mff.cuni.cz nebo na papíře na některém cvičení. Řešení odevzdejte nejpozději na cvičení v pondělí 4. listopadu.

*Izolovaný vrchol* v grafu je vrchol stupně 0.

**Příklad 1.** Najděte 5-regulární vrcholově 2-souvislý graf, který nemá perfektní párování [3 body].

**Příklad 2.** Nechť $T = (V, E)$ je strom. Dokažte, že $T$ má perfektní párování právě tehdy, když pro každý vrchol $v \in V$ má graf $T - v$ právě jednu lichou komponentu. [1 implikace: 1 bod, obě implikace: 3 body]

**Příklad 3.** Nechť $G = (V, E)$ je bipartitní graf. Dokažte, že $G$ má perfektní párování, právě když pro každou množinu $S \subseteq V$ platí, že v grafu $G - S$ je nejvýš $|S|$ izolovaných vrcholů. [1 implikace: 1 bod, obě implikace: 3 body]

**Příklad 4.** Nechť $n \geq 2$ je sudé číslo. Označme $p_n$ počet perfektních párování v úplném grafu $K_n$. Ze cvičení už víme, že

$$p_n = (n-1)(n-3)\cdots 1.$$

Nechť $G$ je graf na $n$ vrcholech mající $\binom{n}{2} - k$ hran. Dokažte, že $G$ má aspoň $p_n - kp_{n-2}$ perfektních párování. Odvoďte z toho, že každý graf na $n$ vrcholech s více než $\binom{n-1}{2}$ hranami má perfektní párování. [4 body]