1 Číselné obory a jejich vlastnosti

Známe následující číselné obory:

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \ldots\} && \text{přirozená čísla}\\
&\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\} && \\
&\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\} && \text{celá čísla}\\
&\mathbb{Q} = \{\frac{k}{n} |\ k \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\} && \text{racionální čísla}
\end{aligned}
$$

A víme, že $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$. Můžeme říci, že množina $\mathbb{Q}$ je „větší“ než množina $\mathbb{N}$? Obě mají nekonečně mnoho prvků. *Mohutnost množiny* je pojem pro velikost množiny. V případě konečných množin je to počet prvků.

Definice 1.1. Dvě množiny M a N mají stejnou *mohutnost*, pokud existuje bijekce z A do B. Množina M je *spočetná* pokud má stejnou mohutnost jako $\mathbb{N}$. Množina je *nejvýše spočetná*, pokud je spočetná nebo konečná. Pokud není množina nejvýše spočetná, pak je *nespočetná*.

Platí, že každá podmnožina spočetné množiny je nejvýše spočetná. Spočetné množiny jsou tedy, neformálně řečeno, nejmenší nekonečné množiny.

Snadno nahlédneme, že množina celých čísel je spočetná, stačí ji přeuspořádat: $\mathbb{Z} = \{0, -1, 1, -2, 2, \ldots\}$. Množina racionálních čísel je také spočetná, potřebnou bijekci lze zkonstruovat seřazením zlomků v základním tvaru v pořadí, v jakém je prochází šipka na Obrázku 1.1.

Alternativně můžeme každé racionální číslo reprezentovat *desetinným rozvojem*. Tento desetinný rozvoj bude vždy konečný nebo periodický.

Pomocí desetinných rozvojů si zavedeme (ne zcela formálně) reálná čísla.

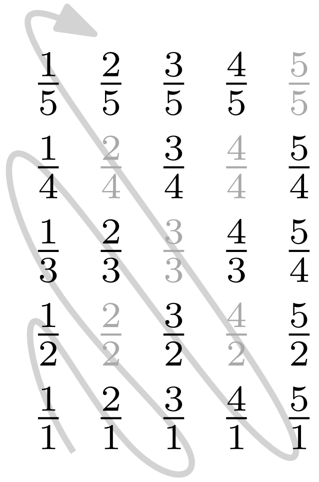
Definice 1.2. *Množina reálných čísel* $\mathbb{R}$ je tvořena všemi desetinnými rozvoji

$$\pm d_0, d_1 d_2 d_3 \ldots$$

kde $d_0 \in \mathbb{N}_0$ a $d_i \in \{0, 1, 2, 3, \ldots, 9\}$ pro $i \in \mathbb{N}$, přičemž jednomu reálnému číslu může odpovídat více než jeden desetinný rozvoj: například $+0,000\ldots = -0,000\ldots$ a $1,000\ldots = 0,999\ldots$.

Čísla v $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ nazýváme *iracionální*. Bez důkazu si uveďme jeden příklad iracionálního čísla.

Fakt 1.3 (Iracionalita $\sqrt{2}$)**.** *$\sqrt{2}$ je iracionální.*



Obrázek 1.1: Bijekce mezi přirozenými čísly a zlomky v základním tvaru.

Věta 1.4 (Nespočetnost reálných čísel.)**.** *Množina reálných čísel není spočetná.*

Důkaz. Pro spor předpokládejme, že existuje posloupnost $(a_1, a_2, \dots)$ všech reálných čísel. Pro $m, n \in \mathbb{N}$ si jako $a_n(m)$ označíme m-tou cifru za desetinnou čárkou v dekadickém rozvoji čísla a_n; má-li rozvoj jen konečně mnoho cifer za desetinnou čárkou, doplníme je nekonečně mnoho nulami, a v případě dvojznačného dekadického rozvoje volíme rozvoj s konečně mnoha devítkami. Číslo α pak definujeme dekadickým rozvojem

$$\alpha = 0{,}b_1 b_2 b_3 \dots,$$

kde n-tá cifra b_n je nejmenší nenulová číslice různá od $a_n(n)$. V tomto rozvoji se za desetinnou čárkou nevyskytuje ani jedna devítka nebo nula, a je tedy jednoznačný. Dále $b_n \neq a_n(n)$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. Tudíž $\alpha \neq a_n$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. To je spor s předpokladem, že posloupnost $(a_1, a_2, \dots)$ obsahuje všechna reálná čísla. $\square$

Dále ještě máme obor komplexních čísel $\mathbb{C} = \{a + b\mathrm{i} \mid a, b \in \mathbb{R}\}$, zabývat se jimi budeme pouze okrajově. Množiny $\mathbb{Q}, \mathbb{R}$ a $\mathbb{C}$ jsou (algebraická) *tělesa.*

Definice 1.5. Pojmem *uspořádané těleso* označujeme dvojici $(T, <)$, kde T je těleso a relace $<$ je lineární uspořádání splňující tyto vlastnosti:

- $\forall a, b, c \in T\colon a < b \implies a + c < b + c$
- $\forall a, b, c \in T\colon a < b \wedge 0 < c \implies ac < bc.$

Vidíme, že $\mathbb{Q}$ i $\mathbb{R}$ spolu se svým obvyklým uspořádáním tvoří uspořádané těleso. Dá se dokázat, že na $\mathbb{C}$ nelze definovat žádné uspořádání tak, aby vzniklo uspořádané těleso.

Definice 1.6. Nechť U ('univerzum') je množina s uspořádáním $\preceq$ a nechť $A \subseteq U$.

- Množina A je *shora omezená* pokud existuje $m \in U$ takové, že $a \preceq m$ pro každý prvek $a \in A$. Takovému m říkáme *horní závora* (nebo *horní mez*) množiny A.
- Prvek $m \in U$ je *supremum* množiny A, pokud m je nejmenší horní závora A. Zapisujeme $m = \sup A$.
- Prvek m je *maximum* (nebo *největší prvek*) množiny A, pokud m je horní závora A a zároveň $m \in A$. Zapisujeme $m = \max A$.
- Množina A je *zdola omezená* pokud existuje $m \in U$ takové, že $a \succeq m$ pro každý prvek $a \in A$. Takovému m říkáme *dolní závora (dolní mez)* množiny A.
- Prvek $m \in U$ je *infimum* množiny A, pokud m je největší dolní závora A. Zapisujeme $m = \inf A$.
- Prvek m je *minimum* (nebo *nejmenší prvek*) množiny A, pokud m je dolní závora A a zároveň $m \in A$. Zapisujeme $m = \min A$.
- Množina A je *omezená* pokud je shora a zdola omezená.

Obecně neplatí, že shora omezená množina musí mít maximum a supremum. Pokud maximum existuje, existuje i supremum a jsou si rovny. Totéž platí pro infimum a minimum.

Příklad 1.7. Nechť $U = \mathbb{R}$ a A je interval $(0, 1]$. Pak A má největší prvek 1, který je tedy zároveň supremum, a jakékoliv $x \geq 1$ je horní mez A. A nemá nejmenší prvek, ale má infimum rovné 0. Každé číslo menší nebo rovné 0 je dolní mez A.

Příklad 1.8. Nechť A je množina racionálních čísel q splňujících $q^2 < 2$. Tato množina je omezená, každé racionální číslo větší než $\sqrt{2}$ (například 2) je její horní závora. Uvažujeme-li $U = \mathbb{Q}$, pak tato množina nemá supremum, protože každé racionální číslo větší než $\sqrt{2}$ je horní mez a žádná horní mez není nejmenší. Uvažujeme-li tutéž množinu A jako podmnožinu $U = \mathbb{R}$, pak její supremum je $\sqrt{2}$.

Předchozí příklad ukazuje, že existence suprema (a ovšem i infima) dané množiny závisí obecně na tom, v jakém univerzu množinu uvažujeme. Ve zbytku semestru pro nás bude roli univerza hrát množina $\mathbb{R}$ s obvyklým uspořádáním, nebude-li výslovně uvedeno jinak.

Věta 1.9. *Každá neprázdná shora omezená podmnožina $\mathbb{R}$ má supremum.*

Větu nebudeme dokazovat, ale zmíníme její lehký důsledek:

Tvrzení 1.10. *Každá neprázdná zdola omezená podmnožina $\mathbb{R}$ má infimum.*

Důkaz. Volme neprázdnou zdola omezenou množinu $A \subseteq \mathbb{R}$. Snadno nahlédneme, že množina $-A = \{-x;\ x \in A\}$ je neprázdná a shora omezená, má tedy supremum s podle předchozí věty. Lehce ověříme, že $-s$ je potom infimum A. $\square$

Definice 1.11. Absolutní hodnota reálného čísla $a \in \mathbb{R}$ je definována

$$|a| = \begin{cases} a & \text{pro } a \geq 0 \\ -a & \text{pro } a < 0. \end{cases}$$

Absolutní hodnota vyjadřuje vzdálenost daného reálného čísla od nuly. Obecně, pro dvě reálná čísla x a y odpovídá hodnota $|x - y|$ vzdálenosti mezi x a y na reálné ose. Reálná čísla s absolutní hodnotou jsou prvním příkladem *metrického prostoru*, který potkáváme.

Definice 1.12. *Metrický prostor* je dvojice (M, d), kde M je množina a $d\colon M \times M \to [0, \infty)$ je funkce taková, že pro každé $x, y \in M$ platí

(i) $d(x, y) = 0$ právě tehdy, když $x = y$,

(ii) $d(x, y) = d(y, x)$ a

(iii) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ pro každé $z \in M$.

Funkci d nazýváme *metrika na* M. Podmínka (iii) se nazývá *trojúhelníková nerovnost*.

Funkce $d(x, y) = |x - y|$ (pro $x, y \in \mathbb{R}$) zřejmě splňuje první dvě podmínky. Z následující věty plyne, že funkce $|x - y|$ splňuje i třetí podmínku (dosazením $a = x - z$ a $b = z - y$).

Věta 1.13 (Trojúhelníková nerovnost)**.** *Pro každé* $a, b \in \mathbb{R}$ *platí, že* $|a + b| \leq |a| + |b|$.

Důkaz. Cvičení. □

Zobecněním této metriky je *eukleidovská metrika* v prostoru $\mathbb{R}^d$, definovaná pro dva body $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^d$, kde $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_d)$ a $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_d)$, vzorcem

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sqrt{\sum_{i=1}^{d} (x_i - y_i)^2}.$$

Na závěr uvedeme ještě další důležitou nerovnost.

Věta 1.14 (Bernoulliova nerovnost)**.** *Pro každé reálné číslo* $x \geq -1$ *a celé číslo* $n \geq 0$ *platí*

$$(1 + x)^n \geq 1 + nx.$$

Důkaz. Pro $n = 0, 1$ zjevně platí. Platí-li pro n, s využitím nerovnosti $1+x \geq 0$ dostaneme

$$(1+x)^{n+1} = (1+x)(1+x)^n \geq (1+x)(1+nx) = 1+(n+1)x+nx^2 \geq 1+(n+1)x,$$

což je Bernoulliova nerovnost pro $n + 1$. □

2 Posloupnosti a jejich limity

Definice 2.1. Nechť M je množina. *Posloupnost s hodnotami v M* je zobrazení z $\mathbb{N}$ do M.

Každé přirozené číslo n je tedy zobrazeno na nějaký prvek a_n množiny M. Tomuto prvku říkáme *n-tý prvek posloupnosti.* Posloupnost $(a_1, a_2, a_3, \ldots)$ obvykle značíme $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, nebo jen (a_n). Zápis $(a_n) \subseteq M$ znamená, ze jde o posloupnost s hodnotami v M.

Pokud nebude uvedeno jinak, budeme se zabývat posloupnostmi reálných čísel. Některé poznatky také zobecníme pro posloupnosti s hodnotami v $\mathbb{R}^d$.

Definice 2.2. Posloupnost reálných čísel (a_n) je

- *shora omezená*, pokud existuje $K \in \mathbb{R}$ takové, že $a_n < K$ pro každé $n \in \mathbb{N}$,
- *zdola omezená*, pokud existuje $K \in \mathbb{R}$ takové, že $a_n > K$ pro každé $n \in \mathbb{N}$,
- *omezená*, pokud je shora i zdola omezená,
- *rostoucí*, pokud $a_n < a_m$ pro každé $n < m$,
- *neklesající* (nebo též *slabě rostoucí*), pokud $a_n \leq a_m$ pro každé $n < m$,
- *klesající*, pokud $a_n > a_m$ pro každé $n < m$,
- *nerostoucí* (nebo *slabě klesající*), pokud $a_n \geq a_m$ pro každé $n < m$,
- *monotónní*, pokud je neklesající nebo nerostoucí.

Definice 2.3 (Okolí bodu)**.** *Okolí bodu s o poloměru δ*, kde $\delta \in \mathbb{R}$ a $\delta \geq 0$, je interval $U(s, \delta) = (s - \delta, s + \delta)$. Jinak zapsáno,

$$U(s, \delta) = \{x \in \mathbb{R};\ |x - s| < \delta\}.$$

Obecněji, pro daný metrický prostor M s metrikou d, a pro daný bod $s \in M$ a poloměr $\delta \in [0, \infty)$ definujeme $U(s, \delta)$ jako $\{x \in M;\ d(x, s) < \delta\}$.

Definice 2.4 (Vlastní limita)**.** Nechť (a_n) je posloupnost reálných čísel. Řekneme, že $L \in \mathbb{R}$ je *(vlastní) limita* posloupnosti (a_n), pokud pro každé reálné číslo $\varepsilon > 0$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé přirozené číslo $n \geq n_0$ je $a_n \in U(L, \varepsilon)$. Pokud posloupnost má vlastní limitu, říkáme, že *konverguje*, případně že je *konvergentní*, a píšeme

$$\lim_{n \to \infty} a_n = L.$$

Všimněte si, že výše uvedená definice limity se dá beze změny obecněji aplikovat na posloupnost prvků z libovolného metrického prostoru, tedy například i z $\mathbb{R}^d$ (v němž vždy předpokládáme eukleidovskou metriku).

Definice 2.5 (Nevlastní limita)**.** Nechť (a_n) je posloupnost reálných čísel. Řekneme, (a_n) má *(nevlastní) limitu* $+\infty$, píšeme $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$, pokud pro každé reálné číslo K existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé přirozené číslo $n \geq n_0$ je $a_n > K$. Řekneme, (a_n) má *(nevlastní) limitu* $-\infty$, píšeme $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$ pokud pro každé reálné číslo K existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé přirozené číslo $n \geq n_0$ je $a_n < K$.

Všimněte si, že každá posloupnost může mít nejvýše jednu limitu.

Věta 2.6 (O limitě monotónní posloupnosti)**.** *Každá monotónní posloupnost $(a_n) \subseteq \mathbb{R}$ má limitu. Je-li navíc tato posloupnost i omezená, tak je tato limita vlastní.*

Důkaz. Předpokládejme, že (a_n) je neklesající, případ, kdy (a_n) je nerostoucí se řeší podobně. Pokud není (a_n) shora omezená, snadno rozmyslíme, že má limitu $+\infty$. Předpokládejme tedy, že posloupnost je shora omezená a definujme

$$S = \sup(\{a_1, a_2, \ldots\}) \in \mathbb{R}.$$

Dokažme, že S je limita (a_n). Podle definice suprema pro dané $\varepsilon > 0$ existuje n_0, že

$$S - \varepsilon < a_{n_0} \leq S\ ,$$

(jinak by $S - \varepsilon$ bylo horní závorou menší než supremum, což nelze). Díky monotonii (a_n) a vlastnosti suprema tyto nerovnosti platí i pro každé a_n s $n > n_0$. Ukázali jsme tedy, že $\lim_{n\to\infty} a_n = S$. □

V předchozí větě by bylo možné předpoklady poněkud oslabit: monotonii (a_n) stačí vždy předpokládat jen pro každé $n > n_0$. Obecněji, snadno nahlédneme, že pokud má nějaká posloupnost (a_n) limitu L, tak stejnou limitu má i každá jiná posloupnost, která se od (a_n) liší jen v konečně mnoha prvcích.

Definice 2.7 (Podposloupnost)**.** Posloupnost (b_n) je *podposloupností* posloupnosti (a_n), pokud existuje rostoucí posloupnost přirozených čísel $k_1 < k_2 < \ldots$ taková, že $b_n = a_{k_n}$ pro $n = 1, 2, \ldots$.

Je jasné, že pak $k_n \geq n$ pro každé n. Relace „být podposloupností" je tranzitivní a reflexivní, ale ne antisymetrická.

Pozorování 2.8 (O limitě podposloupnosti)**.** *Je-li (b_n) podposloupnost posloupnosti (a_n) a $\lim_{n\to\infty} a_n = A \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$, pak i $\lim_{n\to\infty} b_n = A$.*

Nalezneme-li tedy v posloupnosti (a_n) dvě podposloupnosti s různými limitami, $\lim_{n\to\infty} a_n$ neexistuje.

Příklad 2.9. Konstantní posloupnosti $(1, 1, 1, \ldots)$ a $(-1, -1, -1, \ldots)$ s limitami 1 a -1 jsou podposloupnostmi v $(a_n) = ((-1)^n)$, takže $\lim_{n\to\infty} (-1)^n$ neexistuje.

Lemma 2.10. *Každá posloupnost obsahuje monotónní podposloupnost.*

Důkaz. Nechť (a_n) je posloupnost. Řekneme, že prvek a_n je *dominantní*, pokud pro každé $m \geq n$ platí $a_n > a_m$, tj. a_n je větší než všechny následující prvky. Rozlišme nyní dva případy: buď má (a_n) nekonečně mnoho dominantních prvků, nebo jich má jen konečně mnoho.

Pokud má a_n nekonečně mnoho dominantních prvků, pak tyto prvky tvoří klesající podposloupnost a jsme hotovi. Předpokládejme nyní, že (a_n) má jen konečně mnoho dominantních prvků, a tedy existuje index n_1 takový, že pro žádné $n \geq n_1$ není prvek a_n dominantní. Zvolme nyní induktivně podposloupnost $b_1, b_2, \ldots$ takto: $b_1 = a_{n_1}$, a pokud už máme definováno $b_k = a_{n_k}$, tak definujme n_{k+1} jako nejmenší index takový, že $n_{k+1} > n_k$ a $a_{n_{k+1}} \geq a_{n_k}$. Všimněte se, že tato volba je možná díky tomu, že a_{n_k} není dominantní. Položme tedy $b_{k+1} = a_{n_{k+1}}$. Tím jsme v (a_n) našli neklesající podposloupnost $b_1, b_2, \ldots$ a jsme hotovi. □

Věta 2.11 (Bolzano-Weierstrassova)**.** *Každá omezená posloupnost reálných čísel má konvergentní podposloupnost.*

Důkaz. Nechť (a_n) je omezená posloupnost. Díky Lemmatu 2.10 víme, že (a_n) má monotónní podposloupnost. Díky omezenosti (a_n) a Větě 2.6 pak víme, že tato monotónní podposloupnost je konvergentní. □

Pro výpočty nevlastních limit zavedeme *rozšířenou reálnou osu* $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$, která vznikne přidáním obou nekonečen k reálným číslům. Porovnávání a aritmetické operace na $\mathbb{R}^*$ definujeme následovně:

$$\begin{aligned}
&\forall a \in \mathbb{R}: \ -\infty < a < +\infty \,; \\
&\forall a \in \mathbb{R}^*, a \neq -\infty: \ a + (+\infty) = (+\infty) + a = +\infty \,; \\
&\forall a \in \mathbb{R}^*, a \neq +\infty: \ a + (-\infty) = (-\infty) + a = -\infty \,; \\
&\forall a \in \mathbb{R}^*, a > 0: \ a(\pm\infty) = (\pm\infty)a = \pm\infty \,; \\
&\forall a \in \mathbb{R}^*, a < 0: \ a(\pm\infty) = (\pm\infty)a = \mp\infty \,; \\
&\forall a \in \mathbb{R}: \ \frac{a}{\pm\infty} = 0 \,.
\end{aligned}$$

Zbylé výrazy

$$(+\infty) + (-\infty),\ (-\infty) + (+\infty),\ 0 \cdot (\pm\infty),\ (\pm\infty) \cdot 0,\ \frac{\pm\infty}{\pm\infty},\ \frac{a}{0} \quad \text{pro} \quad a \in \mathbb{R}^*$$

— součet dvou nekonečen s opačnými znaménky, součin nuly a nekonečna, podíl dvou nekonečen a každý podíl s nulou ve jmenovateli — ponecháváme nedefinované, jsou to tzv. *neurčité výrazy.*

Všimněte si, že v uspořádané množině $(\mathbb{R}^*, <)$ má každá množina horní i dolní mez, a tudíž i supremum a infimum. Speciálně tedy můžeme supremum a infimum dodefinovat i pro ty množiny, pro něž není v $\mathbb{R}$ definováno. Konkrétně, pro prázdnou množinu budeme odteď psát $\sup \emptyset = -\infty$ a pro množinu $M \subseteq \mathbb{R}$, která není v $\mathbb{R}$ shora omezená, budeme psát $\sup M = +\infty$. Obdobné konvence platí i pro infima.

Následující výsledek je základem pro výpočty konkrétních limit.

Věta 2.12 (Aritmetika limit)**.** *Nechť* $(a_n), (b_n)$ *jsou posloupnosti reálných čísel s* $\lim_{n\to\infty} a_n = A \in \mathbb{R}^*$ *a* $\lim_{n\to\infty} b_n = B \in \mathbb{R}^*$*. Pak*

(i) $\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = A + B$*, je-li výraz na pravé straně definován,*

(ii) $\lim_{n\to\infty}(a_n b_n) = AB$*, je-li výraz na pravé straně definován,*

(iii) *pokud* $b_n \neq 0$ *pro každé* $n > n_0$*, pak* $\lim_{n\to\infty}(a_n/b_n) = A/B$*, je-li výraz na pravé straně definován.*

Důkaz přenechme jako cvičení.

Důležité je, že aritmetika limit funguje jen jednosměrně, rovnice jako

$$\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n$$

lze použít jen při čtení zprava doleva: pokud je definovaná pravá strana, pak je definovaná i levá strana a platí rovnost. Není ale obecně pravda, že když (a_n+b_n) konverguje k limitě L, pak konvergují i (a_n) a (b_n) a $\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n = L$: například posloupnosti $a_n = (-1)^n$ a $b_n = -(-1)^n$ nekonvergují, ale jejich součet ano. Totéž platí pro součin a podíl. Obdobně, pokud limity A a B ze znění věty existují, ale např. jejich součet $A + B$ je neurčitý výraz, nelze z toho nic usuzovat o (ne)existenci limity $a_n + b_n$ ani o její hodnotě.

3 Posloupnosti - pokračování

Věta 3.1 (O limitě a uspořádání)**.** *Nechť posloupnosti* $(a_n), (b_n) \subseteq \mathbb{R}$ *mají limity* $\lim_{n\to\infty} a_n = A \in \mathbb{R}^*$ *a* $\lim_{n\to\infty} b_n = B \in \mathbb{R}^*$*.*

(i) *Pokud* $A < B$*, tak existuje* n_0 *takové, že pro každé* $n \geq n_0$ *platí* $a_n < b_n$*.*

(ii) *Pokud pro každé* n *platí* $a_n \leq b_n$*, pak* $A \leq B$*.*

Všimněte si, že v bodu (ii) nelze neostré nerovnosti nahradit ostrými, protože např. posloupnosti $(a_n) = (0, 0, 0, \dots)$ a $(b_n) = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots)$ splní $a_n < b_n$ pro každé n, ale přitom mají obě stejnou limitu 0.

Důkaz. Důkaz proveďme jen pro vlastní limity, pro ty nevlastní je argument ještě jednodušší.

(i) Pro libovolné ε splňující $0 < \varepsilon < (B - A)/2$ existuje n_0 takové, že pro $n > n_0$ platí $a_n < A + \varepsilon < (A + B)/2 < B - \varepsilon < b_n$, takže $a_n < b_n$.

(ii) Kdyby bylo $A > B$, pro velké n by podle (i) platilo $a_n > b_n$, což je ve sporu s předpokladem. (Zde vidíme, že předpoklad v bodu (ii) je zbytečně silný, stačilo by předpokládat, že nerovnost $a_n \leq b_n$ platí pro nekonečně mnoho hodnot n.) □

Tvrzení 3.2. *Nechť* (a_n) *a* (b_n) *jsou posloupnosti takové, že pro každé* $n \in \mathbb{N}$ *platí* $a_n \leq b_n$*. Potom platí následující vztahy:*

(i) *Pokud má* (a_n) *limitu* $+\infty$*, pak existuje i limita* b_n *a je rovna* $+\infty$*.*

(ii) *Pokud má* (b_n) *limitu* $-\infty$*, pak existuje i limita* a_n *a je rovna* $-\infty$*.*

Důkaz. Dokažme jen první tvrzení, to druhé je analogické. Protože $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$, platí, že pro každé $K \in \mathbb{R}$ existuje n_0 takové, že pro $n \geq n_0$ máme $a_n > K$. Potom ale z nerovnosti $a_n \leq b_n$ plyne, že pro totéž n_0 platí, že pro všechna $n \geq n_0$ máme $b_n > K$, a tedy $\lim_{n\to\infty} b_n = +\infty$. □

Věta 3.3 (O dvou policajtech)**.** *Mějme posloupnosti* (a_n), (b_n) *a* (c_n) *splňující* $a_n \leq b_n \leq c_n$ *pro každé* n*. Předpokládejme, že* (a_n) *i* (c_n) *mají obě stejnou limitu* A*. Pak* (b_n) *má také limitu, a ta je rovna* A*.*

Důkaz. Všimněte si, že pro $A \in \{-\infty, +\infty\}$ plyne věta už z Tvrzení 3.2. Všimněte si také, že kdybychom věděli, že (b_n) má limitu, mohli bychom z Věty 3.1 ihned odvodit, že tato limita se rovná A.

Mějme nyní $A \in \mathbb{R}$. Protože (a_n) a (c_n) mají limitu A, tak pro každé $\varepsilon > 0$ existuje n_0 takové, že pro $n \geq n_0$ platí $a_n \in U(A, \varepsilon)$ i $c_n \in U(A, \varepsilon)$. Protože $a_n \leq b_n \leq c_n$, platí pak pro tato n i $b_n \in U(A, \varepsilon)$ a tedy $\lim_{n\to\infty} b_n = A$. □

Definice 3.4 (Hromadný bod.)**.** Nechť (a_n) je posloupnost reálných čísel. Rozšířené reálné číslo $\alpha \in \mathbb{R}^*$ je jejím *hromadným bodem*, pokud je limitou nějaké podposloupnosti (a_n).

Věta 3.5. *Nechť (a_n) je posloupnost a nechť $H \subseteq \mathbb{R}^*$ je množina jejích hromadných bodů. Potom platí následující:*

1. *H je neprázdná.*
2. *H je jednoprvková, právě když (a_n) má (vlastní či nevlastní) limitu, a v tom případě platí $H = \{\lim_{n\to\infty} a_n\}$.*
3. *H má největší i nejmenší prvek v $\mathbb{R}^*$.*

Důkaz. Že H je neprázdná, plyne z toho, že každá posloupnost má monotónní podposloupnost, a že každá monotónní posloupnost má limitu, což jsme dokázali na předchozí přednášce.

Pokud má (a_n) limitu $L \in \mathbb{R}^*$, tak zjevně každá podposloupnost (a_n) má limitu L, a tedy $H = \{L\}$. Předpokládejme nyní, že naopak $H = \{L\}$, a dokažme, že L je limita (a_n). Pro jednoduchost uvažme pouze případ, kdy L je reálné. Pro spor předpokládejme, že L není limita (a_n). To tedy znamená, že exituje $\varepsilon > 0$ takové, že pro každé n_0 existuje $n \geq n_0$ takové, že $a_n \notin U(L,\varepsilon)$. Jinými slovy, (a_n) má podposloupnost (b_n), jejíž žádný prvek nepatří do $U(L,\varepsilon)$. Tato podposloupnost má dle první části věty nějaký hromadný bod $\beta \in \mathbb{R}^*$, který je tedy zároveň hromadným bodem (a_n), ale přitom $\beta \neq L$, což je spor s $H = \{L\}$.

Dokažme nyní, že H má největší prvek (pro nejmenší prvek je argument analogický). Nechť $S \in \mathbb{R}^*$ je supremum H. Ukážeme, že (a_n) má podposloupnost s limitou S, díky čemuž platí, že S patří do H, a tedy že S je největší prvek H. Opět se omezme na případ, kdy S je reálné, pro $S = +\infty$ je argument podobný. Naším cílem nyní bude zkonstruovat podposloupnost $b_1, b_2, b_3, \ldots$ posloupnosti (a_n) splňující $S - \frac{2}{k} < b_k < S + \frac{1}{k}$. Z věty o dvou policajtech pak vyplyne, že (b_n) má limitu S.

Abychom definovali prvek b_k, předpokládejme, že už jsme určili $b_1, \ldots, b_{k-1}$, a postupujme následovně: jelikož je S supremum H, obsahuje H prvek α větší než $S - \frac{1}{k}$ (jinak by $S - \frac{1}{k}$ byla horní mez H menší než S, což je spor s definicí suprema). Nechť (c_n) je podposloupnost (a_n) s limitou α. Dle definice limity pro $\varepsilon = \frac{1}{k}$ platí, že existuje n_0 takové, že pro $n \geq n_0$ platí $c_n \in U(\alpha,\varepsilon)$. Nyní definujeme b_k jako prvek (c_n) náležící do $U(\alpha,\varepsilon)$ a zároveň takový, že b_k se v posloupnosti (a_n) vyskytuje až po všech prvcích $b_1, \ldots, b_{k-1}$. Takové b_k lze jistě najít, protože (c_n) obsahuje nekonečně mnoho prvků z $U(\alpha,\varepsilon)$. Máme tedy hledaný prvek $b_k \in U(\alpha,\varepsilon) \subseteq (S - \frac{2}{k}, S + \frac{1}{k})$. □

Definice 3.6 (Limes superior a limes inferior.)**.** Pojmem *limes superior* posloupnosti (a_n) označujeme její největší hromadný bod. Značí se $\limsup_{n\to\infty} a_n$. Nejmenší hromadný bod se pak nazývá *limes inferior* a značí $\liminf_{n\to\infty} a_n$.

Řady reálných čísel

V matematice občas vyvstane situace, kdy je potřeba sečíst nekonečně mnoho čísel. Při práci s nekonečnými součty ovšem musíme být opatrní: uvažme například nekonečný součet

$$1 + (-1) + 1 + (-1) + 1 + \cdots .$$

Pokusíme-li se ho dvěma způsoby 'zjednodušit' uzávorkováním, dostaneme protiřečící výsledky:

$$\begin{aligned}
&(1 + (-1)) + (1 + (-1)) + (1 + (-1)) + \cdots = 0 + 0 + 0 + \cdots = 0\\
&1 + ((-1) + 1) + ((-1) + 1) + \cdots = 1 + 0 + 0 + \cdots = 1
\end{aligned}$$

Abychom předešli takovýmto komplikacím, musíme nekonečné součty zavést formálně.

Definice 3.7 (Řada a její součet)**.** *Nekonečná řada (reálných čísel)* je výraz

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots ,$$

kde $(a_n)_{n\geq 1}$ je posloupnost reálných čísel. Budeme se snažit přidržovat tohoto značení, ale pochopitelně se používá mnoho variant zápisů nekonečných řad, pro sčítací index se například může použít jiné písmeno, sčítá se od jiné hodnoty než od 1, apod.; zápisy pro nekonečné řady jsou tedy třeba také

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n = b_0 + b_1 + \cdots , \quad \sum_{i=m}^{\infty} a_i = a_m + a_{m+1} + \cdots , \quad \sum_{k\geq 8} c_k = c_8 + c_9 + \cdots .$$

Částečný součet řady, přesněji její n-tý částečný součet s_n, je součet jejích prvních n členů. Pro řadu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je tedy $s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ a pro řadu $\sum_{k\geq 8} c_k$ je $s_n = c_8 + c_9 + \cdots + c_{n+7}$. *Součet* řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je definován jako limita posloupnosti (s_n). Pokud je tato limita vlastní, říkáme, že řada (a_n) je *konvergentní*, pokud $\lim s_n$ neexistuje nebo je nevlastní, je daná řada *divergentní*.

Příklad 3.8. Řada $\sum_{n\geq 0}(-1)^n = 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots$ je divergentní, protože $(s_n) = (1, 0, 1, 0, 1, \ldots)$.

Příklad 3.9. Důležitým příkladem řady je *geometrická řada*

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = 1 + q + q^2 + q^3 + \cdots ,$$

kde $q \in \mathbb{R}$ je parametr zvaný *kvocient*. Pro součet geometrické řady platí, že

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \begin{cases} \frac{1}{1-q} & \ldots \quad -1 < q < 1 \\ +\infty & \ldots \quad q \geq 1 \\ \text{neexistuje} & \ldots \quad q \leq -1. \end{cases}$$

Příklad 3.10. Dalším častým příkladem jsou řady tvaru

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \cdots ,$$

kde $s \in \mathbb{R}$. Pro jejich konvergenci platí, že

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \begin{cases} \text{konverguje pro } s > 1 \\ \text{diverguje pro } s \leq 1. \end{cases}$$

Pro $s = 1$ se tato řada nazývá *harmonická řada*. Je to důležitý příklad řady, která diverguje, ačkoli její prvky konvergují k nule.

4 Funkce

Definice 4.1. Nechť f je reálná funkce definovaná na množině $M \subseteq \mathbb{R}$. Řekneme, že f je na množině M

- *shora omezená*, pokud existuje $K \in \mathbb{R}$ takové, že $f(x) < K$ pro každé $x \in M$,
- *zdola omezená*, pokud existuje $K \in \mathbb{R}$ takové, že $f(x) > K$ pro každé $x \in M$,
- *omezená*, pokud je shora i zdola omezená,
- *rostoucí*, pokud $f(x) < f(y)$ pro každé $x, y \in M$ splňující $x < y$,
- *neklesající*, pokud $f(x) \leq f(y)$ pro každé $x, y \in M$ splňující $x < y$,
- *klesající*, pokud $f(x) > f(y)$ pro každé $x, y \in M$ splňující $x < y$,
- *nerostoucí*, pokud $f(x) \geq f(y)$ pro každé $x, y \in M$ splňující $x < y$,
- *monotónní*, pokud je neklesající nebo nerostoucí,
- *periodická* s periodou $p \in (0, \infty)$, pokud pro každé $x \in M$ patří i $x + p$ a $x - p$ do M, a navíc $f(x - p) = f(x) = f(x + p)$,
- *prostá*, pokud $x \neq y$ implikuje $f(x) \neq f(y)$ pro každé $x, y \in M$.

Na rozdíl od posloupností mohou být monotónní funkce neomezené shora i zdola, příkladem je třeba $f(x) = x$.

Definice 4.2. Nechť $f \colon M \to \mathbb{R}$ je prostá funkce, nechť $H = \{f(x);\ x \in M\}$ je množina jejích hodnot. *Inverzní funkce k funkci* f je funkce $f^{<-1>} \colon H \to M$ splňující $f^{<-1>}(y) = x$ právě tehdy, když $f(x) = y$.

Příklad 4.3. Funkce $f(x) = x^2$ je prostá na intervalu $[0, \infty)$. Funkce inverzní k f na tomto intervalu je $\sqrt{x}$. Na intervalu $(-\infty, 0]$ je funkce $f(x) = x^2$ také prostá, její inverzní funkcí je ale $-\sqrt{x}$.

4.1 Elementární funkce

Definice 4.4 (Eulerovo číslo, exponenciální funkce)**.** *Exponenciální funkce*, značená exp, je pro $x \in \mathbb{R}$ definována jako součet řady

$$\exp(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \dots .$$

Eulerovo číslo e definujeme jako $exp(1)$, je tedy rovno $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$. Je to iracionální číslo, jeho číselná hodnota je asi $2,7$.

Poznamenejme bez důkazu, že řada v definici $\exp(x)$ je konvergentní pro každé $x \in \mathbb{R}$, takže exponenciální funkce je definovaná na celém oboru $\mathbb{R}$.

Pozorování 4.5. *Zřejmě platí* $\exp(0) = 1$. *Dále je vidět, že pro* $x > 0$ *je* $\exp(x) > 1$ *a že* $\exp(x)$ *je pro* $x \geq 0$ *rostoucí funkce.*

Poznámka. Alternativně lze $\exp(x)$ definovat jako limitu $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$. Z časových důvodů nebudeme dokazovat ekvivalenci těchto definic.

Věta 4.6 (Vlastnosti $\exp(x)$)**.** *Exponenciální funkce má následující vlastnosti:*

1. $\exp(x+y) = \exp(x)\exp(y)$ *pro každé* $x, y \in \mathbb{R}$,
2. $\exp(-x) = 1/\exp(x)$ *pro každé* $x \in \mathbb{R}$,
3. $\exp(x)$ *je rostoucí funkce na* $\mathbb{R}$,
4. $\exp(x) > 0$ *pro každé* $x \in \mathbb{R}$,
5. $\exp(x) < 1$ *pro* $x < 0$,
6. $\lim_{n\to\infty}\exp(n) = +\infty$, *a*
7. $\lim_{n\to\infty}\exp(-n) = 0$.

Důkaz. První tvrzení nebudeme dokazovat formálně, poznamenejme pouze, že zmíněná rovnost odpovídá následujícím "intuitivním" manipulacím s řadami:

$$\begin{aligned}
\exp(x)\exp(y) &= \left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}\right)\left(\sum_{\ell=0}^{\infty}\frac{y^\ell}{\ell!}\right)\\
&\overset{?}{=} \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{\ell=0}^{\infty}\frac{x^k y^\ell}{k!\ell!}\\
&\overset{?}{=} \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x^0y^n}{0!n!}+\frac{x^1y^{n-1}}{1!(n-1)!}+\frac{x^2y^{n-2}}{2!(n-2)!}+\ldots+\frac{x^ny^0}{n!0!}\right)\\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(\binom{n}{0}x^0y^n+\binom{n}{1}x^1y^{n-1}+\binom{n}{2}x^2y^{n-2}+\ldots+\binom{n}{n}x^ny^0\right)\\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x+y)^n}{n!} \qquad \text{(užitím binomické věty)}\\
&= \exp(x+y).
\end{aligned}$$

Ovšem abychom získali formální důkaz, museli bychom zdůvodnit, že kroky označené otazníkem zachovávají součty levé a pravé strany, což není triviální (obecně, když změníme pořadí sčítanců v řadě, může se změnit i její součet). Formální důkaz zde dělat nebudeme.

Druhé tvrzení věty vyplývá z prvního užitím rovnosti $\exp(x)\exp(-x) = \exp(0) = 1$. Třetí tvrzení vyplývá z prvního, protože pro $x < y$ máme $\exp(y) = \exp(x+(y-x)) = \exp(x)\exp(y-x) > \exp(x)$, kde poslední nerovnost plyne z Pozorování 4.5.

Zbylá tvrzení věty přímočaře vyplývají z prvních tří a z Pozorování 4.5. $\square$

Z Věty 4.6 plyne, že $\exp(x)$ je vždy kladné číslo. Poznamenejme bez důkazu, že pro každé $y > 0$ existuje právě jedno x takové, že $\exp(x) = y$. Díky tomu můžeme zavést následující definici.

Definice 4.7 (Logaritmus)**.** *Přirozený logaritmus* (nebo prostě jen logaritmus) je funkce $\ln\colon (0,+\infty) \to \mathbb{R}$, která je inverzní k funkci $\exp(x)$. Jinými slovy, pro dané $y > 0$ označujeme $\ln(y)$ (nebo $\ln y$) to číslo $x \in \mathbb{R}$, pro nějž platí $\exp(x) = y$.

Nyní můžeme definovat umocňování obecných reálných čísel.

Definice 4.8. Pro kladné reálné číslo b a reálné číslo x definujeme $b^x := \exp(x \ln b)$. Pro kladné reálné číslo $b \neq 1$, definujeme *logaritmus o základu* b, píšeme $\log_b x$, jako inverzní funkci k b^x.

Všimněme si, že s takto definovaným umocňováním platí $e^x = \exp(x)$ a že tato definice umocňování je pro přirozený exponent $n \in \mathbb{N}$ shodná s obvyklou definicí umocňování pomocí násobení: například

$$x^2 = \exp(2\ln x) = \exp(\ln x + \ln x) = \exp(\ln x)\exp(\ln x) = x \cdot x.$$

Logaritmus o daném základu b lze z přirozeného logaritmu spočítat jako $\log_b x = \frac{\ln x}{\ln b}$.

Definice 4.9 (Goniometrické funkce)**.** Funkce *sinus* a *cosinus* definujeme jako součet následujících řad

$$\sin x := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots$$

a

$$\cos x := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots .$$

Funkce *tangens* a *cotangens* jsou definovány jako $\tan x$ (nebo $\operatorname{tg} x$) $= \frac{\sin x}{\cos x}$ pro $x \in \mathbb{R} \setminus \{\pi/2 + k\pi | k \in \mathbb{Z}\}$ a $\operatorname{cotg} x = \frac{\cos x}{\sin x}$ pro $x \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi | k \in \mathbb{Z}\}$.

Definice 4.10 (Cyklometrické funkce)**.** Funkce *arkus sinus* $\arcsin\colon [-1,1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ je definována jako inverzní funkce k funkci sinus na intervalu $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

Funkce *arkus cosinus* $\arccos\colon [-1,1] \to [0,\pi]$ je definována jako inverzní funkce k funkci cosinus na intervalu $[0,\pi]$.

Funkce *arkus tangens* $\arctan\colon (-\infty,\infty) \to (-\pi/2, \pi/2)$ je definována jako inverzní funkce k funkci tangens na intervalu $(-\pi/2, \pi/2)$.

Poznámka: grafy všech funkcí zmíněných v tomto textu si můžete prohlédnout např. na https://www.geogebra.org/graphing?lang=en.

Limity funkcí

Definice 4.11 (Okolí bodu)**.** Připomeňme, že *okolí se středem* $a \in \mathbb{R}$ *o poloměru* ε, nebo prostě ε*-okolí bodu* a, je interval $U(a,\varepsilon) = (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$. Nyní zavedeme několik dalších druhů okolí.

Okolí nekonečen definujeme jako $U(+\infty, \varepsilon) = (1/\varepsilon, +\infty)$ a $U(-\infty, \varepsilon) = (-\infty, -1/\varepsilon)$. *Pravé okolí,* resp. *levé okolí,* bodu $a \in \mathbb{R}$ je interval $U^+(a, \varepsilon) = [a, a + \varepsilon)$, resp. $U^-(a, \varepsilon) = (a - \varepsilon, a]$.

Prstencová okolí bodu $a \in \mathbb{R}$ jsou obyčejná okolí s vyjmutým bodem a: $P(a, \varepsilon) = U(a, \varepsilon)\backslash\{a\}$, $P^+(a, \varepsilon) = U^+(a, \varepsilon)\backslash\{a\}$ a $P^-(a, \varepsilon) = U^-(a, \varepsilon)\backslash\{a\}$. Pro $a \in \{-\infty, +\infty\}$ definujeme $P(a, \varepsilon) = U(a, \varepsilon)$. Jednostranná okolí nekonečen zavádět nebudeme.

Definice 4.12 (Limita funkce)**.** Řekneme, že funkce f *má v bodě* $b \in \mathbb{R}^*$ *limitu* $L \in \mathbb{R}^*$, když

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \; \forall x \in P(b, \delta) \colon \; f(x) \in U(L, \varepsilon),$$

což zapisujeme

$$\lim_{x \to b} f(x) = L.$$

Poznámka. Limita funkce f v bodě b nezávisí na její hodnotě v b, f ani nemusí být v b definovaná. Z definice limity ovšem plyne, že pokud má funkce limitu v bodě $b \in \mathbb{R}^*$, tak musí být definovaná na nějakém prstencovém okolí tohoto bodu.

Příklad 4.13. Pokud $f(x) = x$ a $b \in \mathbb{R}$, pak $\lim_{x \to b} f(x) = b$. Pokud změníme hodnotu funkce v nule a definujeme f jako

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{pro } x \neq 0 \\ 1 & \text{pro } x = 0, \end{cases}$$

pak stále $\lim_{x \to b} f(x) = b$ pro každé $b \in \mathbb{R}$, i pro $b = 0$.

Příklad 4.14. Funkce *signum* (znaménko) definovaná předpisem

$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1 & \text{pro } x > 0, \\ 0 & \text{pro } x = 0, \\ -1 & \text{pro } x < 0 \end{cases}$$

má limitu $\lim_{x \to b} \operatorname{sgn}(x) = \operatorname{sgn}(b)$ pro $b \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$, a $\lim_{x \to 0} \operatorname{sgn}(x)$ neexistuje.

Předchozí příklad ukazuje, že někdy je vhodné uvažovat levé a pravé prstencové okolí bodu zvlášť.

Definice 4.15 (Jednostranné limity)**.** Řekneme, že funkce $f(x)$ má v bodě $b \in R$ *limitu zprava* rovnou $L \in \mathbb{R}^*$, což zapisujeme

$$\lim_{x \to b^+} f(x) = L,$$

pokud

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \; \forall x \in P^+(b, \delta) \colon \; f(x) \in U(L, \varepsilon).$$

Analogicky definujeme *limitu zleva*, jen $P^+(b, \delta)$ se nahradí $P^-(b, \delta)$. To zapisujeme $\lim_{x \to b^-} f(x) = L$.

Podobně jako u posloupnosti, limita funkce, pokud existuje, je jednoznačně určena.

Věta 4.16 (Jednoznačnost limity funkce)**.** *Funkce má v daném bodě nejvýše jednu limitu.*

Důkaz. $L, L' \in \mathbb{R}^*$ buďte dvě různé limity funkce $f(x)$ v bodě $b \in \mathbb{R}^*$. Protože $L \neq L'$, lze zvolit tak malé $\varepsilon > 0$, že $U(L,\varepsilon) \cap U(L',\varepsilon) = \emptyset$. Mají existovat $\delta_1, \delta_2 > 0$ taková, že pro $x \in P(b,\delta_1)$ platí $f(x) \in U(L,\varepsilon)$ a zároveň pro $x \in P(b,\delta_2)$ platí $f(x) \in U(L',\varepsilon)$. Pro $\delta = \min(\delta_1,\delta_2)$ pak pro každé $x \in P(b,\delta)$ platí $f(x) \in U(L,\varepsilon) \cap U(L',\varepsilon)$. To je ale spor, protože $U(L,\varepsilon) \cap U(L',\varepsilon) = \emptyset$. $\square$

Existence limity úzce souvisí s existencí jednostranných limit. Jestliže funkce f má v bodě b limitu zleva i zprava rovnou L, pak $\lim_{x\to b} f(x) = L$. Naopak, pokud má f v bodě $b \in \mathbb{R}$ limitu L, pak má v tomto bodě i obě jednostranné limity a ty jsou rovné L.

Limitu funkce je možno definovat ekvivalentním způsobem pomocí limity posloupnosti, jak ukazuje další věta.

Věta 4.17 (Heineho definice limity funkce)**.** *Nechť f je funkce definovaná na prstencovém okolí $P(b,\Delta)$ bodu $b \in \mathbb{R}^*$ pro nějaké $\Delta > 0$. Následující dvě tvrzení jsou ekvivalentní:*

1. $\lim_{x\to b} f(x) = L$;
2. *pro každou posloupnost $(x_n) \subseteq P(b,\Delta)$, pro níž platí $\lim_{n\to\infty} x_n = b$, platí také $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = L$.*

Zdůrazněme, že v části 2 předchozí věty se uvažují pouze ty posloupnosti (x_n), jejichž prvky jsou obsažené v prstencovém okolí bodu b, a tedy speciálně samotné číslo b se v těchto posloupnostech nemůže vyskytnout.

Pomocí Věty 4.17 můžeme snadno převést známé výsledky o aritmetice limit posloupností na analogické výsledky o limitách funkcí. Věta nám také dává návod jak ukázat, že funkce f nemá v bodě b limitu: stačí najít dvě posloupnosti (x_n) a (y_n) obsažené v prstencovém okolí b a mající limitu b tak, aby posloupnosti $(f(x_n))$ a $(f(y_n))$ neměly stejné limity. Konkrétní ukázkou takového argumentu je následující příklad.

Příklad 4.18. Pomocí Věty 4.17 ukážeme, že funkce $f(x) = \sin(1/x)$, která je definovaná na množině $M = \mathbb{R}\setminus\{0\}$, nemá limitu v nule. Uvažme dvě posloupnosti (x_n) a (y_n), kde

$$x_n = \frac{1}{\pi n} \quad \text{a} \quad y_n = \frac{1}{(2n+1/2)\pi}, n \in \mathbb{N}.$$

Zřejmě $\lim x_n = \lim y_n = 0$, ale $f(x_n) = \sin(1/x_n) = 0$ a $f(y_n) = \sin(1/y_n) = 1$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. Proto $\lim_{x\to 0} \sin(1/x)$ neexistuje.

Důkaz Věty 4.17 si ukážeme na následující přednášce.