2 Posloupnosti a jejich limity

Definice 2.1. Nechť M je množina. *Posloupnost s hodnotami v M* je zobrazení z $\mathbb{N}$ do M.

Každé přirozené číslo n je tedy zobrazeno na nějaký prvek a_n množiny M. Tomuto prvku říkáme *n-tý prvek posloupnosti.* Posloupnost $(a_1, a_2, a_3, \ldots)$ obvykle značíme $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, nebo jen (a_n). Zápis $(a_n) \subseteq M$ znamená, ze jde o posloupnost s hodnotami v M.

Pokud nebude uvedeno jinak, budeme se zabývat posloupnostmi reálných čísel. Některé poznatky také zobecníme pro posloupnosti s hodnotami v $\mathbb{R}^d$.

Definice 2.2. Posloupnost reálných čísel (a_n) je

- *shora omezená*, pokud existuje $K \in \mathbb{R}$ takové, že $a_n < K$ pro každé $n \in \mathbb{N}$,
- *zdola omezená*, pokud existuje $K \in \mathbb{R}$ takové, že $a_n > K$ pro každé $n \in \mathbb{N}$,
- *omezená*, pokud je shora i zdola omezená,
- *rostoucí*, pokud $a_n < a_m$ pro každé $n < m$,
- *neklesající* (nebo též *slabě rostoucí*), pokud $a_n \leq a_m$ pro každé $n < m$,
- *klesající*, pokud $a_n > a_m$ pro každé $n < m$,
- *nerostoucí* (nebo *slabě klesající*), pokud $a_n \geq a_m$ pro každé $n < m$,
- *monotónní*, pokud je neklesající nebo nerostoucí.

Definice 2.3 (Okolí bodu)**.** *Okolí bodu s o poloměru δ*, kde $\delta \in \mathbb{R}$ a $\delta \geq 0$, je interval $U(s, \delta) = (s - \delta, s + \delta)$. Jinak zapsáno,

$$U(s, \delta) = \{x \in \mathbb{R};\ |x - s| < \delta\}.$$

Obecněji, pro daný metrický prostor M s metrikou d, a pro daný bod $s \in M$ a poloměr $\delta \in [0, \infty)$ definujeme $U(s, \delta)$ jako $\{x \in M;\ d(x, s) < \delta\}$.

Definice 2.4 (Vlastní limita)**.** Nechť (a_n) je posloupnost reálných čísel. Řekneme, že $L \in \mathbb{R}$ je *(vlastní) limita* posloupnosti (a_n), pokud pro každé reálné číslo $\varepsilon > 0$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé přirozené číslo $n \geq n_0$ je $a_n \in U(L, \varepsilon)$. Pokud posloupnost má vlastní limitu, říkáme, že *konverguje*, případně že je *konvergentní*, a píšeme

$$\lim_{n \to \infty} a_n = L.$$

Všimněte si, že výše uvedená definice limity se dá beze změny obecněji aplikovat na posloupnost prvků z libovolného metrického prostoru, tedy například i z $\mathbb{R}^d$ (v němž vždy předpokládáme eukleidovskou metriku).

Definice 2.5 (Nevlastní limita)**.** Nechť (a_n) je posloupnost reálných čísel. Řekneme, (a_n) má *(nevlastní) limitu* $+\infty$, píšeme $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$, pokud pro každé reálné číslo K existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé přirozené číslo $n \geq n_0$ je $a_n > K$. Řekneme, (a_n) má *(nevlastní) limitu* $-\infty$, píšeme $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$ pokud pro každé reálné číslo K existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé přirozené číslo $n \geq n_0$ je $a_n < K$.

Všimněte si, že každá posloupnost může mít nejvýše jednu limitu.

Věta 2.6 (O limitě monotónní posloupnosti)**.** *Každá monotónní posloupnost* $(a_n) \subseteq \mathbb{R}$ *má limitu. Je-li navíc tato posloupnost i omezená, tak je tato limita vlastní.*

Důkaz. Předpokládejme, že (a_n) je neklesající, případ, kdy (a_n) je nerostoucí se řeší podobně. Pokud není (a_n) shora omezená, snadno rozmyslíme, že má limitu $+\infty$. Předpokládejme tedy, že posloupnost je shora omezená a definujme

$$S = \sup(\{a_1, a_2, \ldots\}) \in \mathbb{R}.$$

Dokažme, že S je limita (a_n). Podle definice suprema pro dané $\varepsilon > 0$ existuje n_0, že

$$S - \varepsilon < a_{n_0} \leq S\ ,$$

(jinak by $S - \varepsilon$ bylo horní závorou menší než supremum, což nelze). Díky monotonii (a_n) a vlastnosti suprema tyto nerovnosti platí i pro každé a_n s $n > n_0$. Ukázali jsme tedy, že $\lim_{n\to\infty} a_n = S$. □

V předchozí větě by bylo možné předpoklady poněkud oslabit: monotonii (a_n) stačí vždy předpokládat jen pro každé $n > n_0$. Obecněji, snadno nahlédneme, že pokud má nějaká posloupnost (a_n) limitu L, tak stejnou limitu má i každá jiná posloupnost, která se od (a_n) liší jen v konečně mnoha prvcích.

Definice 2.7 (Podposloupnost)**.** Posloupnost (b_n) je *podposloupností* posloupnosti (a_n), pokud existuje rostoucí posloupnost přirozených čísel $k_1 < k_2 < \ldots$ taková, že $b_n = a_{k_n}$ pro $n = 1, 2, \ldots$.

Je jasné, že pak $k_n \geq n$ pro každé n. Relace „být podposloupností“ je tranzitivní a reflexivní, ale ne antisymetrická.

Pozorování 2.8 (O limitě podposloupnosti)**.** *Je-li* (b_n) *podposloupnost posloupnosti* (a_n) *a* $\lim_{n\to\infty} a_n = A \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$*, pak i* $\lim_{n\to\infty} b_n = A$*.*

Nalezneme-li tedy v posloupnosti (a_n) dvě podposloupnosti s různými limitami, $\lim_{n\to\infty} a_n$ neexistuje.

Příklad 2.9. Konstantní posloupnosti $(1, 1, 1, \ldots)$ a $(-1, -1, -1, \ldots)$ s limitami 1 a -1 jsou podposloupnostmi v $(a_n) = ((-1)^n)$, takže $\lim_{n\to\infty} (-1)^n$ neexistuje.

Lemma 2.10. *Každá posloupnost obsahuje monotónní podposloupnost.*

Důkaz. Nechť (a_n) je posloupnost. Řekneme, že prvek a_n je *dominantní*, pokud pro každé $m \geq n$ platí $a_n > a_m$, tj. a_n je větší než všechny následující prvky. Rozlišme nyní dva případy: buď má (a_n) nekonečně mnoho dominantních prvků, nebo jich má jen konečně mnoho.

Pokud má a_n nekonečně mnoho dominantních prvků, pak tyto prvky tvoří klesající podposloupnost a jsme hotovi. Předpokládejme nyní, že (a_n) má jen konečně mnoho dominantních prvků, a tedy existuje index n_1 takový, že pro žádné $n \geq n_1$ není prvek a_n dominantní. Zvolme nyní induktivně podposloupnost $b_1, b_2, \ldots$ takto: $b_1 = a_{n_1}$, a pokud už máme definováno $b_k = a_{n_k}$, tak definujme n_{k+1} jako nejmenší index takový, že $n_{k+1} > n_k$ a $a_{n_{k+1}} \geq a_{n_k}$. Všimněte se, že tato volba je možná díky tomu, že a_{n_k} není dominantní. Položme tedy $b_{k+1} = a_{n_{k+1}}$. Tím jsme v (a_n) našli neklesající podposloupnost $b_1, b_2, \ldots$ a jsme hotovi. □

Věta 2.11 (Bolzano-Weierstrassova)**.** *Každá omezená posloupnost reálných čísel má konvergentní podposloupnost.*

Důkaz. Nechť (a_n) je omezená posloupnost. Díky Lemmatu 2.10 víme, že (a_n) má monotónní podposloupnost. Díky omezenosti (a_n) a Větě 2.6 pak víme, že tato monotónní podposloupnost je konvergentní. □

Pro výpočty nevlastních limit zavedeme *rozšířenou reálnou osu* $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$, která vznikne přidáním obou nekonečen k reálným číslům. Porovnávání a aritmetické operace na $\mathbb{R}^*$ definujeme následovně:

$$
\begin{aligned}
&\forall a \in \mathbb{R}: \ -\infty < a < +\infty\ ;\\
&\forall a \in \mathbb{R}^*, a \neq -\infty: \ a + (+\infty) = (+\infty) + a = +\infty\ ;\\
&\forall a \in \mathbb{R}^*, a \neq +\infty: \ a + (-\infty) = (-\infty) + a = -\infty\ ;\\
&\forall a \in \mathbb{R}^*, a > 0: \ a(\pm\infty) = (\pm\infty)a = \pm\infty\ ;\\
&\forall a \in \mathbb{R}^*, a < 0: \ a(\pm\infty) = (\pm\infty)a = \mp\infty\ ;\\
&\forall a \in \mathbb{R}: \ \frac{a}{\pm\infty} = 0\ .
\end{aligned}
$$

Zbylé výrazy

$$
(+\infty) + (-\infty),\ (-\infty) + (+\infty),\ 0 \cdot (\pm\infty),\ (\pm\infty) \cdot 0,\ \frac{\pm\infty}{\pm\infty},\ \frac{a}{0} \quad \text{pro} \quad a \in \mathbb{R}^*
$$

— součet dvou nekonečen s opačnými znaménky, součin nuly a nekonečna, podíl dvou nekonečen a každý podíl s nulou ve jmenovateli — ponecháváme nedefinované, jsou to tzv. *neurčité výrazy.*

Všimněte si, že v uspořádané množině $(\mathbb{R}^*, <)$ má každá množina horní i dolní mez, a tudíž i supremum a infimum. Speciálně tedy můžeme supremum a infimum dodefinovat i pro ty množiny, pro něž není v $\mathbb{R}$ definováno. Konkrétně, pro prázdnou množinu budeme odteď psát $\sup \emptyset = -\infty$ a pro množinu $M \subseteq \mathbb{R}$, která není v $\mathbb{R}$ shora omezená, budeme psát $\sup M = +\infty$. Obdobné konvence platí i pro infima.

Následující výsledek je základem pro výpočty konkrétních limit.

Věta 2.12 (Aritmetika limit)**.** *Nechť* $(a_n), (b_n)$ *jsou posloupnosti reálných čísel s* $\lim_{n\to\infty} a_n = A \in \mathbb{R}^*$ *a* $\lim_{n\to\infty} b_n = B \in \mathbb{R}^*$*. Pak*

(i) $\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = A + B$*, je-li výraz na pravé straně definován,*

(ii) $\lim_{n\to\infty}(a_n b_n) = AB$*, je-li výraz na pravé straně definován,*

(iii) *pokud* $b_n \neq 0$ *pro každé* $n > n_0$*, pak* $\lim_{n\to\infty}(a_n/b_n) = A/B$*, je-li výraz na pravé straně definován.*

Důkaz přenechme jako cvičení.

Důležité je, že aritmetika limit funguje jen jednosměrně, rovnice jako

$$\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n$$

lze použít jen při čtení zprava doleva: pokud je definovaná pravá strana, pak je definovaná i levá strana a platí rovnost. Není ale obecně pravda, že když (a_n+b_n) konverguje k limitě L, pak konvergují i (a_n) a (b_n) a $\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n = L$: například posloupnosti $a_n = (-1)^n$ a $b_n = -(-1)^n$ nekonvergují, ale jejich součet ano. Totéž platí pro součin a podíl. Obdobně, pokud limity A a B ze znění věty existují, ale např. jejich součet $A + B$ je neurčitý výraz, nelze z toho nic usuzovat o (ne)existenci limity $a_n + b_n$ ani o její hodnotě.