První série domácích úkolů

- Řešení dodejte nejpozději v pondělí 4. března.
- Přejete-li si mít své bodové zisky zveřejněny na webu cvičení, dejte mi vědět. Můžete si případně zvolit přezdívku.
- Číslo v rámečku u zadání označuje bodové ohodnocení příkladu.
- Tvrzení dokázaná na přednášce nebo na cvičení, jakož i tvrzení známá z přednášek z minulého semestru, smíte ve svých řešeních využívat, aniž byste je dokazovali. Všechny ostatní argumenty musíte korektně zdůvodnit.

V následujících příkladech jsou m a n vždy přirozená čísla.

Symbolem $[n]$ označme množinu $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$.

Nechť $f \colon A \to B$ je funkce. Řekneme, že prvek $x \in A$ je *pevný bod* funkce f, pokud platí, že $f(x) = x$.

$\boxed{3}$ 1. Nechť $m \leq n$. Kolik existuje funkcí z množiny $[m]$ do množiny $[n]$, které nemají žádný pevný bod?

$\boxed{4}$ 2. Nechť $m \leq n$. Kolik existuje funkcí z množiny $[m]$ do množiny $[n]$, které nemají žádný pevný bod a navíc jsou prosté?

$\boxed{3}$ 3. Kolik existuje funkcí z množiny $A = [2n]$ do množiny $B = [n]$ takových, že na každý prvek B se zobrazí právě dva různé prvky A? *Pro kontrolu podotkněme, že například pro $n = 2$ vyhovuje zadání této úlohy následujících šest funkcí:*

- $f(1) = 1,\ f(2) = 1,\ f(3) = 2$ *a* $f(4) = 2$
- $f(1) = 1,\ f(2) = 2,\ f(3) = 1$ *a* $f(4) = 2$
- $f(1) = 1,\ f(2) = 2,\ f(3) = 2$ *a* $f(4) = 1$
- $f(1) = 2,\ f(2) = 1,\ f(3) = 1$ *a* $f(4) = 2$
- $f(1) = 2,\ f(2) = 1,\ f(3) = 2$ *a* $f(4) = 1$
- $f(1) = 2,\ f(2) = 2,\ f(3) = 1$ *a* $f(4) = 1$