Desátá série domácích úkolů z DM

Vyřešené příklady posílejte mailem na adresu jelinek@iuuk.mff.cuni.cz, nebo přineste na cvičení 19. prosince. Řešení dodejte nejpozději v úterý 8. ledna.

Své odpovědi nezapomeňte zdůvodnit. Smíte bez důkazu využívat kterékoliv tvrzení dokázané na přednášce nebo na cvičení, ale nezapomeňte říci, které tvrzení využíváte.

Při vymýšlení správného postupu smíte navzájem spolupracovat, ale své finální řešení musíte sepsat samostatně.

---

**Příklad 1.** Celkem $s$ studentů řešilo domácí úkol, který obsahoval $p$ příkladů. Každý student vyřešil aspoň $\frac{p}{2}$ příkladů. Navíc nadpoloviční většina studentů vyřešila všechny příklady. Dokažte, že existuje příklad, který vyřešilo aspoň $\frac{3}{4}s$ studentů. [4 body]

**Příklad 2.** Turnaje ve čtyřkovém mariáši (což je hra pro 4 hráče) se zúčastnilo 20 hráčů. Každá dvojice hráčů se sešla právě třikrát u společné partie. Kolik bylo na turnaji sehráno partií? [3 body]

**Příklad 3.** Nechť $M$ je matice s deseti sloupci a deseti řádky obsahující čísla $1, 2, \ldots, 10$, přičemž každé z těchto čísel se v matici $M$ vyskytuje právě desetkrát. Dokažte, že v $M$ existuje sloupec nebo řádek, který obsahuje aspoň čtyři různá čísla. [5 bodů] *(Nápověda: můžete začít třeba tím, že dokážete, že každé z čísel od 1 do 10 má výskyty v aspoň sedmi liniích matice $M$, kde slovem linie je míněn sloupec nebo řádek.)*

**Příklad 4.** Třináct lidí si mezi sebou posílalo vánoční přání. Každý z nich poslal přání sedmi lidem ze zbývajících dvanácti. Dokažte, že někdo z nich poslal přání člověku, od kterého sám přání nedostal. [3 body]