Čtvrtá série domácích úkolů z DM

Vyřešené příklady posílejte mailem na adresu jelinek@iuuk.mff.cuni.cz, nebo přineste na cvičení 31. října. Řešení dodejte nejpozději v úterý 6. listopadu.

Své odpovědi nezapomeňte zdůvodnit. Smíte bez důkazu využívat kterékoliv tvrzení dokázané na přednášce nebo na cvičení, ale nezapomeňte říci, které tvrzení využíváte.

Při vymýšlení správného postupu smíte navzájem spolupracovat, ale své finální řešení musíte sepsat samostatně.

Symbol $\mathbb{R}$ označuje množinu reálných čísel.

Příklad 1. Kolik existuje ekvivalencí na množině $\{1, 2, 3, 4\}$? [3 body]

Příklad 2. Nechť $\mathcal{F}$ je množina všech funkcí z $\mathbb{R}$ do $\mathbb{R}$ (jinými slovy, prvky $\mathcal{F}$ jsou všechny funkce, jejichž definiční obor je množina $\mathbb{R}$, a jejichž obor hodnot je nějaká podmnožina $\mathbb{R}$). Pro následující relace na množině $\mathcal{F}$ rozhodněte, zda to jsou ekvivalence:

- R_1 je relace na $\mathcal{F}$ definovaná tak, že dvojice funkcí (f, g) patří do R_1, právě když $f(0) = g(0)$. [2 body]
- R_2 je relace na $\mathcal{F}$ definovaná tak, že $(f, g) \in R_2$, právě když existuje aspoň jedno $x \in \mathbb{R}$ takové, že $f(x) = g(x)$. [3 body]
- R_3 je relace na $\mathcal{F}$ definovaná tak, že $(f, g) \in R_3$, právě když existuje jenom konečně mnoho hodnot x, pro něž platí $f(x) \neq g(x)$. (Jinými slovy, $(f, g) \in R_3$, právě když množina $\{x \in \mathbb{R};\ f(x) \neq g(x)\}$ je konečná.) [3 body]

Příklad 3. Nechť M je libovolná množina a nechť E_1 a E_2 jsou dvě ekvivalence na množině M. Definujme relace $P = E_1 \cap E_2$ a $S = E_1 \cup E_2$.

- Dokažte, že P je také ekvivalence na M. [2 body]
- Najděte příklad množiny M a ekvivalencí E_1 a E_2 na M takových, že S není ekvivalence. [2 body]