

Druhý test z kombinatoriky a grafů

- Nezapomeňte podepsat všechny papíry, které chcete odevzdat.
 - Tvrzení dokázaná na přednášce, na cvičení nebo při řešení domácího úkolu, jakož i tvrzení známá z přednášek z minulého semestru, smíte ve svých řešeních využívat, aniž byste je dokazovali. Všechny ostatní argumenty musíte korektně zdůvodnit.
-

- 13 1. Necht' G je konečný graf s aslepoň dvěma hranami, jehož každý vrchol má stupeň aspoň 1. Dokažte, že G je vrcholově 2-souvislý právě tehdy, když každé dvě hrany G leží na nějaké společné kružnici.
- 13 2. Celkem s studentů psalo zápočtový test, který obsahoval celkem p příkladů. Aspoň $s/2$ studentů vyřešilo správně všechny příklady z testu. Navíc každý student vyřešil správně aspoň $p/2$ příkladů z testu. Ukažte, že v testu byl příklad, který správně vyřešilo aspoň $\frac{3}{4}s$ studentů.
- 12 3. Necht' \vec{G} je nekonečný úplný orientovaný graf na množině vrcholů $\mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$. Jinými slovy, \vec{G} je orientovaný graf, který pro každé dva různé vrcholy $i, j \in \mathbb{N}$ obsahuje právě jednu ze dvou možných orientovaných hran (i, j) a (j, i) . Dokažte, že existuje nekonečná množina vrcholů $X \subseteq \mathbb{N}$ taková, že podgraf grafu \vec{G} indukovaný množinou X neobsahuje žádnou orientovanou kružnici délky 3. (Pojmem *orientovaná kružnice délky 3* se myslí kružnice na třech různých vrcholech i, j, k , jejíž hrany jsou orientované "kolem dokola", tj. ta kružnice obsahuje buď hrany $(i, j), (j, k), (k, i)$, nebo hrany $(i, k), (k, j), (j, i)$.)
- 12 4. Necht' G je konečný graf, jehož každý vrchol má stupeň nejvýš 3. Dokažte, že vrcholová souvislost grafu G je stejná jako jeho hranová souvislost.