Čtvrtá série domácích úkolů z Kombinatoriky a grafů II
(verze pro středeční cvičení)

Řešení odevzdejte nejpozději v úterý 9. ledna.

Příklad 1. Nechť G je multigraf, který má Tutteův polynom

$$T_G(x,y) = x^5 + 2x^4 + 2x^3y + x^3 + 2x^2y + xy^2.$$

- Kolik má G hran? [1 bod]
- Jaká je vrcholová barevnost G? [1 bod]
- Kolik má G smyček? [1 bod]
- Kolik má G koster, jestliže předpokládáme, že je souvislý? [1 bod]

Příklad 2. Označme $a_{n,k}$ počet způsobů, jak lze číslo n vyjádřit jako součet k lichých kladných čísel. Dva součty pokládáme za různé i tehdy, když se liší jen pořadím sčítanců. Například $a_{7,3} = 6$, protože číslo 7 můžeme vyjádřit jako $5+1+1$, $1+5+1$, $1+1+5$, $3+3+1$, $3+1+3$ a $1+3+3$. Najděte vzoreček v uzavřeném tvaru (tj. bez použití nekonečných sum) pro mocninnou řadu $A(x,y) = \sum_{n\geq 0}\sum_{k\geq 0} a_{n,k}x^n y^k$. [3 body]

Příklad 3. Mějme "šachovnici" se třemi řádky a třemi sloupci. Spočítejte, kolik existuje neizomorfních způsobů, jak obarvit devět políček této šachovnice pomocí b barev. Dvě obarvení jsou izomorfní, pokud lze jedno převést na druhé pomocí rotace nebo vodorovného, svislého či diagonálního překlopení. Neklademe žádná omezení na možné barvy políček, tj. například sousední políčka mohou být obarvena stejnou barvou. [3 body]

Příklad 4. Pro $m \in \mathbb{N}_0$ označme a_m počet tříd izomorfismu všech multigrafů bez smyček majících čtyři vrcholy a m hran. Například $a_3 = 6$, jak ukazuje obrázek šesti multigrafů se třemi hranami uvedený níže. Najděte vzorec v uzavřeném tvaru pro mocninnou řadu $\sum_{m\geq 0} a_m x^m$. [3 body] *(Poznámka: není zde nutné hledat vzoreček pro samotné koeficienty a_m, stačí opravdu jen vzorec pro tu mocninnou řadu.)*