Třetí série domácích úkolů

- Řešení dodejte nejpozději v úterý 17. dubna.
- Přejete-li si mít své bodové zisky zveřejněny na webu cvičení, dejte mi vědět. Můžete si případně zvolit přezdívku.
- Tvrzení dokázaná na přednášce nebo na cvičení, jakož i tvrzení známá z přednášek z minulého semestru, smíte ve svých řešeních využívat, aniž byste je dokazovali. Všechny ostatní argumenty musíte korektně zdůvodnit.

---

1. Rozhodněte, zda jsou následující tvrzení pravdivá. Pravdivá tvrzení dokažte, pro nepravdivá najděte protipříklad.

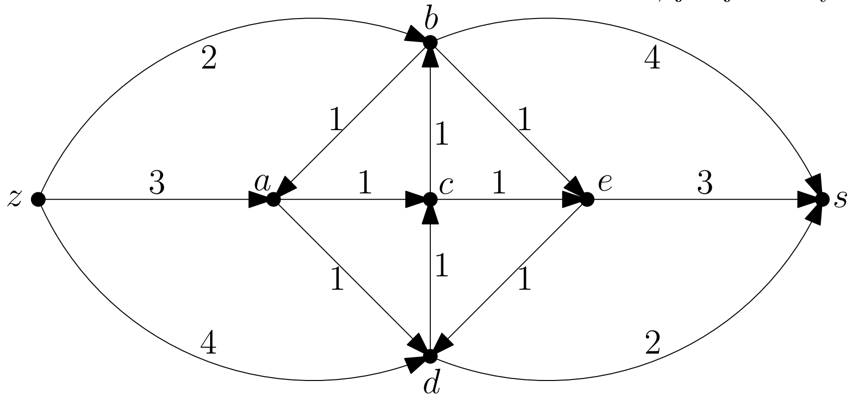
$\boxed{1}$ (a) Nechť f je tok v nějaké síti S. Potom v síti S existuje maximální tok g takový, že pro každou hranu e platí $f(e) \leq g(e)$.

$\boxed{1}$ (b) Nechť f je maximální tok v nějaké síti S a nechť R je minimální řez v S. Potom pro každou hranu $e \in R$ platí, že $f(e) = c(e)$, kde $c(e)$ označuje kapacitu e.

$\boxed{1}$ (c) Nechť f je tok v nějaké síti S a nechť R je nějaký řez v S. Pokud pro každou hranu $e \in R$ platí, že $f(e) = c(e)$, tak f je maximální tok a R je minimální řez.

$\boxed{1}$ (d) Nechť R je minimální řez v síti $S = (G, z, s, c)$. Předpokládejme, že kapacity všech hran S jsou nenulové. Potom každá orientovaná cesta ze z do s v grafu G obsahuje právě jednu hranu z řezu R.

$\boxed{3}$ 2. Na následujícím obrázku je toková síť, v níž z je zdroj, s je stok a čísla u hran označují kapacity. Najděte maximální tok a minimální řez v této síti. Naznačte, jak jste k výsledku došli.



$\boxed{3}$ 3. Nechť $G = (V, E)$ je hypergraf. Pojmem *systém skoro různých reprezentantů (SSRR)* označme funkci $r\colon E \to V$, která každé hyperhraně $e \in E$ přiřadí reprezentanta $r(e) \in e$ tak, že každý vrchol bude reprezentantem pro nejvýše dvě hyperhrany. Dokažte, že hypergraf G má SSRR, právě když platí

$$\forall F \subseteq E\colon |F| \leq 2\left|\bigcup_{e\in F} e\right|.$$