

Příklady ze cvičení z KGI

středa 7. 3.

1. Definujme čísla a_n , b_n a c_n takto:

- a_n je počet způsobů, jak lze číslo n zapsat jako součet tří nezáporných celých čísel
- b_n je počet způsobů, jak lze číslo n zapsat jako součet tří kladných celých čísel
- c_n je počet způsobů, jak lze číslo n zapsat jako součet libovolného počtu kladných celých čísel

Vždy platí, že dva součty pokládáme za různé, i když se liší jen pořadím sčítanců. Najděte vzorce pro vytvořující funkce posloupností $(a_n)_{n=0}^{\infty}$, $(b_n)_{n=0}^{\infty}$ a $(c_n)_{n=0}^{\infty}$. Najděte i vzorce pro samotná čísla a_n , b_n a c_n .

2. Mějme posloupnost čísel zadanou vztahy

$$\begin{aligned}a_0 &= 2 \\a_1 &= \frac{5}{2} \\a_n &= \frac{5}{2}a_{n-1} - a_{n-2} \text{ pro } n \geq 2.\end{aligned}$$

Najděte vytvořující funkci této posloupnosti a najděte vzorec v uzavřeném tvaru pro a_n .

3. Mějme posloupnost čísel zadanou vztahy

$$\begin{aligned}a_0 &= 2 \\a_n &= \frac{5}{2}a_{n-1} - a_{n-2} \text{ pro } n \geq 2 \\ \lim_{n \rightarrow \infty} a_n &\text{ je konečná.}\end{aligned}$$

Najděte vytvořující funkci této posloupnosti a najděte vzorec v uzavřeném tvaru pro a_n .