První série domácích úkolů z Kombinatoriky a grafů II
(verze pro úterní cvičení)

Vyřešené příklady odevzdávejte buď mailem na adresu jelinek@iuuk.mff.cuni.cz nebo na papíře na některém cvičení. Řešení odevzdejte nejpozději v pondělí 24. října.

Příklady za 0 bodů jsou bonusové příklady, které můžete vyřešit, budete-li chtít, ovšem jejich vyřešení nemá vliv na zisk zápočtu. Vaše řešení bonusových příkladu vám samozřejmě rád opravím.

Počet lichých komponent grafu G značím $\mathrm{odd}(G)$. *Izolovaný vrchol* v nějakém grafu je vrchol stupně 0.

Příklad 1. Dokažte, že každý strom má nejvýš jedno perfektní párování. [1 bod]

Příklad 2. Nechť $G = (V, E)$ je graf a nechť $\mu(G)$ označuje velikost největšího párování v grafu G. Řekneme, že párování P grafu G je *maximální*, pokud pro každou neparovací hranu $e \in E \setminus P$ platí, že $P \cup \{e\}$ není párování. Dokažte, že každé maximální párování grafu G má aspoň $\frac{1}{2}\mu(G)$ hran. [2 body]

Příklad 3. Kolik perfektních párování má graf vzniklý z úplného bipartitního grafu $K_{n,n}$ odebráním jedné hrany? [1 bod]

Příklad 4. Nechť $G = (V, E)$ je bipartitní graf. Dokažte, že G má perfektní párování, právě když pro každou množinu $S \subseteq V$ platí, že v grafu $G - S$ je nejvýš $|S|$ izolovaných vrcholů. [1 implikace: 1 bod, obě implikace: 3 body]

Příklad 5. Nechť $G = (V, E)$ je bipartitní graf se dvěma stejně velkými partitami X a Y. Předpokládejme, že platí následující verze Hallovy podmínky: $\forall A \subseteq X : |A| \leq |N(A)|$, kde $N(A)$ je množina vrcholů, které mají aspoň jednoho souseda v A. Ze cvičení už víme, že v takovém případě platí i symetrická Hallova podmínka pro druhou partitu, tj. $\forall B \subseteq Y : |B| \leq |N(B)|$. Dokažte bez použití Hallovy či Tutteovy věty, že v G platí i Tutteova podmínka, tj. $\forall S \subseteq V : \mathrm{odd}(G - S) \leq |S|$. [3 body]

Příklad 6. Nechť n je sudé číslo. Dokažte, že každý graf na n vrcholech s více než $\binom{n-1}{2}$ hranami má perfektní párování. [3 body] *(Nápověda: může se vám hodit poznatek, odvozený na cvičení, že libovolná hrana je obsažená v přesně $(n-3)(n-5)\cdots 1$ perfektních párováních grafu K_n.)*

Příklad 7. Dokažte následující "Tutteovu větu s deficitem": Nechť k je nezáporné celé číslo. Graf $G = (V, E)$ má párování s nejvýše k volnými vrcholy, právě když platí $\forall S \subseteq V : \mathrm{odd}(G - S) \leq |S| + k$. [0 bodů]

Příklad 8. Najděte 5-regulární vrcholově 2-souvislý graf, který nemá perfektní párování. [0 bodů]