Druhá série domácích úkolů z Lineární algebry II
(verze pro cvičeni v pondělí od 14:00)

Vyřešené příklady posílejte mailem na adresu jelinek@iuuk.mff.cuni.cz. Řešení pošlete nejpozději v neděli 5. března.

Své výsledky nezapomeňte zdůvodnit. Smíte bez důkazu využívat kterékoliv tvrzení dokázané na přednášce nebo na cvičení, ale nezapomeňte říci, které tvrzení využíváte.

Při vymýšlení správného postupu smíte navzájem spolupracovat, ale své finální řešení musíte sepsat samostatně.

Příklad 1. O každém z následujících tří tvrzení rozhodněte, zda je pravdivé. Pravdivá tvrzení dokažte, pro nepravdivá najděte protipříklad. [1 bod za každé tvrzení]

a) Nechť $\|\cdot\|_2$ je libovolná norma na prostoru $\mathbb{R}^2$. Definujme zobrazení $\|\cdot\|_3\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ takto: pro vektor $x = (x_1, x_2, x_3)^T \in \mathbb{R}^3$ platí
$$\|x\|_3 = \left\| \begin{pmatrix} x_2 \\ 3x_1 \end{pmatrix} \right\|_2 + 37 \left\| \begin{pmatrix} x_2 - x_3 \\ x_2 \end{pmatrix} \right\|_2 .$$
Potom $\|\cdot\|_3$ je norma na $\mathbb{R}^3$.

b) Pro každý vektor $x = \binom{x_1}{x_2} \in \mathbb{R}^2$ a každou normu $\|\cdot\|$ na prostoru $\mathbb{R}^2$ platí $\left\|\binom{x_1}{x_2}\right\| = \left\|\binom{x_2}{x_1}\right\|$.

c) Pro každý vektor $x = \binom{x_1}{x_2} \in \mathbb{R}^2$ a každou normu $\|\cdot\|$ na prostoru $\mathbb{R}^2$ platí $\left\|\binom{x_1}{x_2}\right\| = \left\|\binom{-x_1}{x_2}\right\|$.

(Poznámka: jestli vám to pomůže, můžete při řešení využít i kterékoliv tvrzení, jehož důkaz byl součástí předchozího domácího úkolu.)

Příklad 2. V tomto příkladu předpokládejme, že $\|\cdot\|$ označuje vždy euklidovskou normu v prostoru příslušné dimenze. Nechť $\mathcal{L}$ je vektorový prostor všech lineárních zobrazení z $\mathbb{R}^m$ do $\mathbb{R}^n$. Definujme zobrazení $N\colon \mathcal{L} \to \mathbb{R}$ takto: pro $f \in \mathcal{L}$ platí
$$N(f) = \sup_{x \in \mathbb{R}^m \setminus \{0\}} \frac{\|f(x)\|}{\|x\|}.$$
Dokažte, že N je norma na $\mathcal{L}$. [3 body] (Poznámka: stačí, když dokážete, že N splňuje trojúhelníkovou nerovnost, ostatní vlastnosti normy už jsme ověřili na cvičení. Jestli vám to pomůže, můžete si supremum v definici N nahradit maximem – platí, že podíl $\|f(x)\|/\|x\|$ na množině $\mathbb{R}^m \setminus \{0\}$ opravdu nabývá maxima, ale to dokazovat nemusíte.)