

První série domácích úkolů z Lineární algebry II  
(verze pro cvičení v pondělí od 14:00)

Vyřešené příklady posílejte mailem na adresu jelinek@iuuk.mff.cuni.cz. Řešení pošlete nejpozději v neděli 26. února.

Své výsledky nezapomeňte zdůvodnit. Smíte bez důkazu využívat kterékoliv tvrzení dokázané na přednášce nebo na cvičení, ale nezapomeňte říci, které tvrzení využíváte.

Při vymýšlení správného postupu smíte navzájem spolupracovat, ale své finální řešení musíte sepsat samostatně.

---

**Příklad 1.** Dokažte, že pro každou  $n$ -tici reálných čísel  $a_1, \dots, a_n$  a každou  $n$ -tici kladných reálných čísel  $b_1, \dots, b_n$  platí

$$\sum_{i=1}^n \frac{a_i^2}{b_i} \geq \frac{(\sum_{i=1}^n a_i)^2}{\sum_{i=1}^n b_i}.$$

Nápověda: může být výhodné jmenovatel pravé strany převést na levou stranu. [2 body]

**Příklad 2.** Nechť  $K$  je krychle. Nechť  $A$  je libovolný vrchol krychle  $K$ , nechť  $B$  je vrchol  $K$  spojený hranou s vrcholem  $A$  a nechť  $C$  je vrchol  $K$  spojený tělesovou úhlopříčkou s vrcholem  $A$  (tj. úsečka  $AC$  prochází středem krychle  $K$ ). Označme  $\alpha$  velikost úhlu sevřeného úsečkami  $AB$  a  $AC$  u vrcholu  $A$ . Čemu se rovná  $\cos(\alpha)$ ? [1 bod]

**Příklad 3.** Nechť  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$  je reálná symetrická matice tvaru  $2 \times 2$  taková, že  $a > 0$  a  $c > 0$ . Uvažujme zobrazení  $\langle x, y \rangle_A = x^T A y$ . Dokažte, že toto zobrazení je skalární součin právě tehdy, když platí, že  $ac - b^2 > 0$ . Zdá-li se vám to těžké, vyřešte alespoň speciální případ, kdy jednu (nebo i obě) z konstant  $a$  nebo  $c$  nahradíte jedničkou. (Poznámka: už na cvičení jsme nahlédli, že zobrazení  $\langle \cdot, \cdot \rangle_A$  je lineární v první složce a symetrické. Tyto dvě vlastnosti tedy už znovu ověřovat nemusíte.) [3 body]