

Domácí úkoly z diskrétní matematiky  
5. série

- Své odpovědi nezapomeňte zdůvodnit.
- Řešení odevzdejte nejpozději ve středu 4. ledna.

**Příklad 1.** Existuje nesouvislý graf, jehož doplněk je také nesouvislý? Pokud ano, najděte všechny takové grafy. [1 bod] (*Připomeňme, že doplněk grafu  $G = (V, E)$  je graf  $\overline{G} = (V, \binom{V}{2} \setminus E$ .)*)

**Příklad 2.** Existuje graf, v němž žádné dva různé vrcholy nemají stejný stupeň? Pokud ano, najděte všechny takové grafy. [1 bod]

**Příklad 3.** Existuje bipartitní graf, jehož doplněk je také bipartitní? Pokud ano, najděte všechny takové grafy. [2 body]

**Příklad 4.**

- a) Nechť  $G$  je graf na  $n$  vrcholech, jehož každý vrchol má stupeň aspoň  $\lfloor n/2 \rfloor + 1$ . Dokažte, že  $G$  obsahuje kružnici délky 3 jako podgraf. [2 body]
- b) Dokažte, že pro každé  $n \in \mathbb{N}$  existuje graf na  $n$  vrcholech, jehož každý vrchol má stupeň aspoň  $\lfloor n/2 \rfloor$  a který neobsahuje kružnici délky 3 jako podgraf. [2 body]

**Příklad 5.** Mějme skupinu třinácti lidí. Každý z nich se rozhodl poslat vánoční pozdrav sedmi ze zbývajících dvanácti lidí. Dokažte, že někdo z této skupiny dostal vánoční pozdrav od někoho, komu sám pozdrav neposlal. [2 body]