Třetí série domácích úkolů
verze pro cvičení v úterý od 15:40

- Řešení dodejte nejpozději v pondělí 21. března.
- Přejete-li si mít své bodové zisky zveřejněny na webu cvičení, dejte mi vědět. Můžete si případně zvolit prezdívku.
- Číslo v rámečku u zadání označuje bodové ohodnocení příkladu.

---

1. Odvoďte explicitní vzorec v uzavřeném tvaru pro n-tý člen následujících posloupností (‘explicitní vzorec v uzavřeném tvaru’ zde znamená vzorec, který vyjádří příslušný n-tý člen jako funkci n, bez použití sum či podobných výrazů).

$\boxed{2}$ (a) posloupnost $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ taková, že $a_0 = 1$ a pro $n \geq 1$ platí $a_n = 2a_{n-1} + n + 1$.

$\boxed{2}$ (b) posloupnost $(b_n)_{n=0}^{\infty}$ taková, že $b_0 = 0$ a pro $n \geq 1$ platí $b_n = 1 - \frac{2}{3}\sum_{k=0}^{n-1} b_k$.

$\boxed{1}$ (c) posloupnost $(c_n)_{n=0}^{\infty}$, kde

$$c_n = \binom{5}{5} + \binom{6}{5} + \cdots + \binom{n+5}{5} = \sum_{k=0}^{n} \binom{k+5}{5}.$$

$\boxed{2}$ 2. Nechť $q(n) = q_0 + q_1 n + q_2 n^2 + \cdots + q_d n^d$ je nějaký polynom v proměnné n stupně d. Ukažte, že posloupnost hodnot tohoto polynomu $q(0)$, $q(1)$, $q(2), \ldots$ má vytvořující funkci tvaru

$$A(x) = \frac{P(x)}{(1-x)^{d+1}},$$

kde $P(x)$ je nějaký polynom v proměnné x stupně nejvýš d. Zdá-li se vám to těžké, dokažte to aspoň pro nějakou konkrétní (pokud možno co největší) hodnotu $d \in \mathbb{N}$.