Jedenáctá série domácích úkolů
verze pro cvičení v úterý od 14:00

- Lhůta pro dodání řešení je úterý 12. května v 6 hodin ráno.
- Svá řešení mi posílejte mailem na adresu jelinek@iuuk.mff.cuni.cz nebo mi je po předchozí domluvě přineste osobně.
- Řešení by mělo obsahovat nejen konečný výsledek, ale i postup, jak jste k výsledku dospěli.
- Přejete-li si mít své bodové zisky zveřejněny na webu cvičení, dejte mi vědět. Můžete si případně zvolit prezdívku.
- Číslo v rámečku u zadání označuje bodové ohodnocení příkladu.

$\boxed{3}$ 1. Uspořádejte následující tři funkce podle toho, jak rychle rostou:

$$f_1(n) = (n!)^{\ln n}, \qquad f_2(n) = \binom{n^2}{n}, \qquad f_3(n) = 2^{n^{3/2}}$$

(Řekneme, že funkce $f(n)$ "roste rychleji" než funkce $g(n)$, pokud pro každé dost velké n platí $f(n) > g(n)$.)

2. Označme $f(n)$ počet všech grafů na množině vrcholů $\{1, 2, \ldots, n\}$. Označme dále, pro reálné číslo $\alpha > 0$, jako $g_\alpha(n)$ počet všech rovinných grafů na vrcholech $\{1, 2, \ldots, \lfloor n^\alpha \rfloor\}$.

$\boxed{2+1}$ (a) Najděte nějaké $\alpha > 1$, pro nějž platí, že $g_\alpha(n)$ roste pomaleji než $f(n)$ (za to dostanete 2 body). Dokažte, že dokonce pro libovolné $\alpha < 2$ roste $g_\alpha(n)$ pomaleji než $f(n)$ (za to dostanete bod navíc). Nápověda: stačí vědět, že rovinný graf s $k > 2$ vrcholy má nejvýše $3k - 6$ hran.

$\boxed{2}$ (b) Dokažte naopak, že $g_2(n)$ roste rychleji než $f(n)$. Nápověda: můžete třeba využít toho, že každý podgraf rovinného grafu je zase rovinný.