Druhá série domácích úkolů z Kombinatoriky a grafů II

Vyřešené příklady odevzdávejte buď mailem na adresu jelinek@iuuk.mff.cuni.cz nebo na papíře na některém cvičení. Řešení odevzdejte nejpozději během pondělí 9. prosince. Na cvičeních 10. a 11. prosince ukážu k některým příkladům nápovědu. Řešení můžete odevzdávat i po nápovědě, ale dostanete za ně jen polovinu standardního bodového ohodnocení.

Ve svých řešeních smíte bez důkazu používat všechna tvrzení, která byla dokázána na přednášce nebo na cvičení, jakož i vše, co jste se naučili v předchozích semestrech studia. Nezapomeňte ale zmínit, že nějaký takový výsledek používáte.

Některé otázky jsou označené jako bonusové. Tyto otázky jsou ryze dobrovolné, nezískáte za ně žádné body a jejich vyřešení nemá vliv na zisk zápočtu. Pokud ovšem zvládnete vyřešit hodně bonusových příkladů, budu k vám pak o něco shovívavější u zkoušky.

Hranovou barevnost grafu G značím $\chi'(G)$.

Příklad 1. Nechť Γ je plocha. Dokažte, že existuje n takové, že úplný bipartitní graf $K_{4,n}$ nelze nakreslit na plochu Γ [2 body]. (Bonusová úloha: dokažte, že obdobné tvrzení platí i pro $K_{3,n}$.)

Příklad 2. Nechť G je 3-regulární graf, který je navíc hamiltonovský. Dokažte, že $\chi'(G) = 3$ [1 bod]. Ukažte naopak, že když G je graf (ne nutně hamiltonovský), jehož všechny vrcholy mají stupeň 3 až na jeden vrchol stupně 2, tak $\chi'(G) = 4$ [3 body].

Příklad 3. Dokažte, že když G je Δ-regulární bipartitní graf, tak $\chi'(G) = \Delta$ [2 body]. (Bonusová úloha: dokažte, že dokonce pro každý bipartitní graf s maximálním stupněm Δ platí $\chi'(G) = \Delta$.)

Příklad 4. Nechť G je graf na čtrnácti vrcholech, obsahující čtyři vrcholy stupně 5 a deset vrcholů stupně 7. Dokažte, že G je hamiltonovský [1 bod].

Příklad 5. Nechť $f_1, \ldots, f_n$ je n-tice spojitých funkcí z uzavřeného intervalu $[0,1]$ do množiny reálných čísel. Definujme graf $G = (V, E)$ na množině vrcholů $V = \{1, 2, \ldots, n\}$ tak, že dvojice různých vrcholů $\{i, j\}$ tvoří hranu G, právě když pro aspoň jedno $x \in [0,1]$ platí $f_i(x) = f_j(x)$. Dokažte, že G je perfektní [2 body].

Příklad 6. Pro přirozené číslo N definujme graf G_N následovně: vrcholy G_N jsou všechny dvouprvkové podmnožiny množiny $\{1, 2, \ldots, N\}$. Dva vrcholy x a y jsou spojené hranou, právě když existují tři čísla $i < j < k \in \{1, \ldots, N\}$ taková, že $x = \{i, j\}$ a $y = \{j, k\}$, nebo naopak $y = \{i, j\}$ a $x = \{j, k\}$. Dokažte, že pro každé k existuje N takové, že graf G_N má vrcholovou barevnost větší než k [2 body].

Bonusový příklad. Nechť G je rovinné nakreslení nějakého 3-regulárního vrcholově 2-souvislého grafu. Dokažte, že $\chi'(G) = 3$, právě když G má stěnové obarvení pomocí čtyř barev. ('Stěnové obarvení' je obarvení stěn G takové, že každé dvě stěny sdílející společnou hranu mají různé barvy. Z věty o čtyřech barvách tedy plyne, že G má stěnové obarvení pomocí čtyř barev, a tím pádem platí i $\chi'(G) = 3$.)