

Doplňkové domácí úkoly z Kombinatoriky a grafů I

- Řešení domácích úkolů posílejte mailem na adresu jelinek@iuuk.mff.cuni.cz.
- Na odevzdání řešení je časový limit do konce června.

1. Pro každou z následujících posloupností určete její vytvořující funkci.

0.5

(a)  $0, 1, 0, 3, 0, 5, 0, \dots, 0, 2k + 1, 0, \dots$

0.5

(b)  $1, 1 + \frac{1}{2}, 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}, 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}, \dots, \sum_{i=0}^n \frac{1}{2^i}, \dots$

0.5

(c)  $0, -1, 4, -9, \dots, (-1)^n n^2, \dots$

1

2. Nechť  $(a_n)_{n=0}^{\infty}$  je posloupnost taková, že  $a_0 = 1$  a pro každé  $n \geq 2$  platí  $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ . Jakou hodnotu musí mít  $a_1$ , aby platilo, že  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ ?

3. Nechť  $S = (G, z, s, c)$  je toková síť. Předpokládejme, že v této síti existuje aspoň jeden tok kladné velikosti. Rozhodněte, která z následujících tvrzení jsou pravdivá. Pravdivá tvrzení dokažte, pro nepravdivá tvrzení najděte protipříklad.

0.5

(a) Pokud je kapacita každé hrany  $S$  racionální číslo, tak i velikost maximálního toku v  $S$  je racionální číslo.

0.5

(b) Pokud je kapacita každé hrany  $S$  racionální číslo, tak pro libovolný maximální tok  $f$  a libovolnou hranu  $e$  platí, že  $f(e)$  je racionální.

0.5

(c) Jestliže  $e$  je hrana, jejíž koncový vrchol je  $z$  nebo jejíž počáteční vrchol je  $s$ , tak pro každý maximální tok  $f$  platí  $f(e) = 0$ .

0.5

(d) V síti  $S$  existuje aspoň jeden maximální tok  $f$  takový, že každá hrana  $e$ , na níž má  $f$  kladný průtok, leží na nějaké orientované cestě ze  $z$  do  $s$ .

1

4. Nechť  $(X, \mathcal{P})$  je konečná projektivní rovina s množinou bodů  $X$  a množinou přímek  $\mathcal{P}$ . Protože každá přímka  $p \in \mathcal{P}$  je množina bodů, tvoří množina přímek  $\mathcal{P}$  množinový systém. Dokažte, že  $\mathcal{P}$  má systém různých reprezentantů.

1

5. *Magický čtverec řádu  $n$*  je matice tvaru  $n \times n$ , která obsahuje čísla  $1, 2, \dots, n^2$ , každé právě jednou, a navíc platí, že libovolné dva řádky i libovolné dva sloupce mají stejný součet. Ukažte, že pokud existují dva navzájem ortogonální latinské čtverce řádu  $n$ , tak existuje i magický čtverec řádu  $n$ .

6. Dokažte následující tvrzení.

1

(a) Nechť  $H$  je graf a necht'  $v$  je nějaký vrchol stupně  $d$ . Pokud je graf  $H - v$  vrcholově  $d$ -souvěsly, pak i graf  $H$  je vrcholově  $d$ -souvěsly.

1.5

(b) Nechť  $G$  je graf s alespoň  $k + 1$  vrcholy. Potom  $G$  je vrcholově  $k$ -souvěsly, právě když pro libovolnou  $(k + 1)$ -tici  $(x, y_1, y_2, \dots, y_k)$  různých vrcholů obsahuje graf  $G$  nějakou  $k$ -tici cest  $(P_1, \dots, P_k)$ , kde cesta  $P_i$  spojuje vrchol  $x$  s vrcholem  $y_i$ , a navíc kromě  $x$  nemají žádné dvě tyto cesty jiný společný vrchol. (K řešení tohoto podpříkladu smíte využít tvrzení z předchozího podpříkladu, i když ho neumíte dokázat. Za jednu implikaci získáte půl bodu, za obě 1.5 bodu.)

1

(c) Pro každý vrcholově  $k$ -souvěsly graf platí, že pro libovolnou  $k$ -tici vrcholů  $v_1, \dots, v_k$  existuje v  $G$  kružnice obsahující všechny vrcholy  $v_1, \dots, v_k$ . (K řešení tohoto podpříkladu smíte využít tvrzení z předchozích podpříkladů, i když je neumíte dokázat.)

1

(d) Každý vrcholově  $k$ -souvěsly graf s alespoň  $2k$  vrcholy obsahuje kružnici délky aspoň  $2k$ . (I tady můžete využít tvrzení z předchozích podpříkladů, i když je neumíte dokázat.)

7. Rozhodněte, která z následujících tvrzení jsou pravdivá. Pravdivá tvrzení dokažte, pro nepravdivá najděte protipříklad.

- 1 (a) Pro každý vrcholově 2-souvislý graf  $G$  platí, že pro libovolné tři vrcholy  $x, y, z \in V(G)$  existuje v  $G$  kružnice, která tyto tři vrcholy obsahuje.
- 1 (b) Hrany libovolného vrcholově 2-souvislého grafu lze zorientovat tak, že každé dva vrcholy budou ležet na společně orientované kružnici.
- 1 (c) Nechť  $G$  je souvislý graf s alespoň dvěma hranami. Předpokládejme, že pro libovolné dvě hrany  $e$  a  $f$ , které mají společný vrchol, existuje v  $G$  kružnice obsahující  $e$  i  $f$ . Potom vždy platí, že  $G$  je vrcholově 2-souvislý.

8. Pro následující grafy určete, jakou mají vrcholovou a hranovou souvislost.

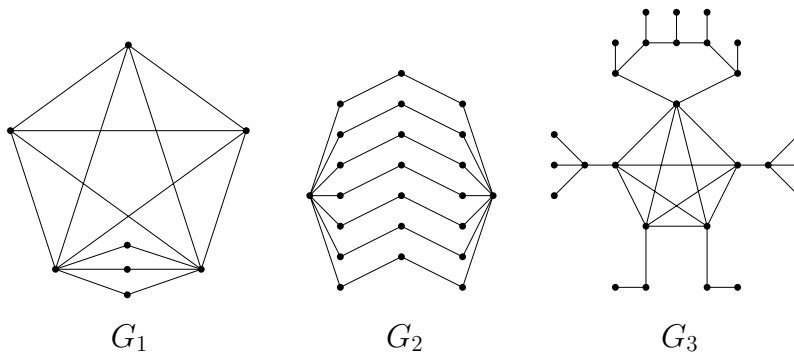
- 1 (a) Úplný bipartitní graf  $K_{m,n}$ .
- 1 (b) Graf vzniklý z úplného grafu  $K_{2n}$  smazáním  $n$  vrcholově disjunktních hran.

9. Připomeňme, že  $k_v(G)$ ,  $k_e(G)$  a  $\delta(G)$  označují vrcholovou souvislost  $G$ , hranovou souvislost  $G$  a minimální stupeň  $G$ . Najděte graf  $G$  splňující  $k_v(G) = 15$ ,  $k_e(G) = 42$  a  $\delta(G) = 138$ .

1+1 10. Dokažte, že úplný bipartitní graf  $K_{m,n}$  má právě  $n^{m-1}m^{n-1}$  různých koster. Zdá-li se vám to těžké, dokažte aspoň, že graf  $K_{3,n}$  má  $n^2 3^{n-1}$  koster. Za  $K_{3,n}$  dostanete 1 bod, za  $K_{m,n}$  2 body.

1+1 11. Nechť  $G = (V, E)$  je graf. Řekneme, že vrcholy  $u, v \in V$  jsou *dvojníci*, pokud platí, že každý vrchol sousedící s  $u$  sousedí také s  $v$  a naopak (z čehož mimo jiné plyne, že  $u$  nesousedí s  $v$ ). Dokažte, že když graf  $G$  obsahuje dva dvojníky  $u$  a  $v$ , kteří mají stupeň dva, tak  $G$  má sudý počet koster. Obtížnější varianta: dokažte, že když  $G$  má dva dvojníky stupně  $d$ , tak počet koster  $G$  je násobek  $d$ . Za jednoduchou variantu je 1 bod, za obtížnější dva.

1.5 12. Pro každý graf na následujícím obrázku určete, kolik má koster (půl bodu za každý graf).



13. Symbolem  $\vec{K}_n$  označme úplný orientovaný graf na  $n$  vrcholech, tj. orientovaný graf, který pro každé dva různé vrcholy  $u$  a  $v$  obsahuje obě orientované hrany  $(u, v)$  i  $(v, u)$ .

- 1 (a) Ukažte, že pro každé  $N \in \mathbb{N}$  je možné obarvit orientované hrany  $\vec{K}_N$  dvěma barvami tak, že nevznikne žádný podgraf izomorfní  $\vec{K}_{10}$ , jehož orientované hrany by měly všechny stejnou barvu.
- 1 (b) Ukažte, že pro každé  $b \in \mathbb{N}$  a  $n \in \mathbb{N}$  existuje  $N \in \mathbb{N}$  takové, že když libovolně obarvíme orientované hrany  $\vec{K}_N$  pomocí  $b$  barev, tak vždy bude existovat podgraf izomorfní  $\vec{K}_n$  na jehož orientovaných hranách se vyskytují nejvýše dvě různé barvy.

2+2 14. Najděte příklad nekonečného množinového systému  $\mathfrak{M} = (M_i; i \in \mathbb{N})$ , který splňuje Hallovu podmínku, ale nemá systém různých reprezentantů. (2 body)

Dokažte na druhou stranu, že když  $\mathfrak{M} = (M_i; i \in \mathbb{N})$  je nekonečný množinový systém, v němž každá množina  $M_i$  je konečná, tak  $\mathfrak{M}$  má systém různých reprezentantů právě tehdy, když splňuje Hallovu podmínku. (2 body)