Domácí úkol z Kombinatoriky a grafů I

osmá série, verze pro cvičení ve čtvrtek 17:20

Termín odevzdání: nejpozději ve čtvrtek 17. 4. v 17:20.
Čísla ve čtverečku jsou počty bodů.

$\boxed{3}$ 1. O každém z následujících tvrzení rozhodněte, zda je pravdivé. (1 bod za každé tvrzení)

(a) V každé tokové síti, která má aspoň dva různé maximální toky, lze najít nekonečně mnoho maximálních toků.

(b) Když R je elementární řez v nějaké tokové síti $\mathcal{S}$ a e nějaká hrana v řezu R, tak množina $R \setminus \{e\}$ už není řez v $\mathcal{S}$.

(c) Pokud $\mathcal{S}$ je toková síť, která má aspoň jeden tok kladné velikosti, tak v této síti existuje hrana e, která je nasycená v každém maximálním toku. (Řekneme, že hrana e je nasycená v toku f, pokud $f(e)$ je rovno kapacitě hrany e.)

$\boxed{2+1}$ 2. V poslanecké sněmovně působí několik sněmovních výborů. Každý poslanec je členem právě jednoho výboru a každý výbor má pevně stanovený počet členů. Po každých volbách je nutno každému poslanci určit výbor, jehož má být členem. Předpokládejme, že nám každý poslanec nově zvolené sněmovny oznámí seznam těch výborů, v nichž je ochoten působit. Navrhněte algoritmus, který poslance rozdělí do výborů tak, aby každý poslanec byl v některém z jeho zvolených výborů, případně určí, že takové rozdělení neexistuje.

Obtížnější varianta: předpokládejme navíc, že každý poslanec je členem právě jedné politické strany, a chtějme rozdělit poslance do výborů podle výše uvedených pravidel, a navíc tak, aby žádná strana neměla v žádném výboru víc než deset zástupců. Váš algoritmus by měl běžet v čase, který je polynomiální vzhledem k počtu poslanců. Nezapomeňte dokázat, že Váš algoritmus úlohu skutečně řeší. Jednodušší varianta je za dva body, obtížnější za tři.

$\boxed{2}$ 3. Na následujícím obrázku je toková síť, v níž z je zdroj, s je stok a čísla u hran označují kapacity. Najděte maximální tok a minimální řez (tj. řez s nejmenší kapacitou) v této síti. Naznačte, jak jste k výsledku došli.