Domácí úkol z Kombinatoriky a grafů I
verze pro cvičení ve čtvrtek 17:20

Termín odevzdání: nejpozději ve čtvrtek 6. 3. ve 17:20.
Čísla ve čtverečku jsou počty bodů.
Symbol $[n]$ označuje množinu čísel $\{1, 2, \ldots, n\}$.

1. Pro každou následující dvojici funkcí (f_i, g_i) rozhodněte, která funkce ve dvojici je "větší" (řekneme, že f je větší než g, pokud pro každé dost velké $n \in \mathbb{N}$ platí, že $f(n) > g(n)$).

$\boxed{1}$ (a) $f_1(n)$ je počet permutací množiny $[n]$ a $g_1(n)$ je počet ekvivalencí na množině $[n]$. Nápověda: zkuste třeba najít nějaké injektivní nebo surjektivní zobrazení mezi permutacemi a ekvivalencemi.

$\boxed{3}$ (b) $f_2(n)$ je počet podmnožin množiny $[2n]$, které mají přesně n prvků, a $g_2(n)$ je počet podmnožin množiny $[2n]$, které mají nejvýše $0.999n$ prvků. Zdá-li se vám to těžké, nahraďte si 0.999 nějakou jinou konstantou $c \in (0, 1)$ dle vašeho výběru a vyřešte aspoň takto upravené zadání (za to dostanete 2 body).

2. Označme $g(n)$ počet všech grafů na množině vrcholů $[n]$ a $f(n)$ počet všech bipartitních grafů na množině vrcholů $[n]$.

$\boxed{2}$ (a) Dokažte, že pro každé dost velké n platí $g(n) < f(2n)$.

$\boxed{1+1+1}$ (b) Dokažte, že dokonce existuje konstanta $\alpha < 2$ taková, že pro každé dost velké n platí

$$g(n) < f(\lceil \alpha n \rceil).$$

Zkuste najít co nejmenší α, pro které to platí. Za nalezení nějakého $\alpha < 2$ dostanete 1 bod, za nalezení nejmenšího možného α dostanete 2 body, a pokud navíc dokážete, že vaše α je opravdu nejmenší možné, dostanete 3 body.

Když správně vyřešíte příklad 2b (stačí i nejjednodušší variantu), tak dostanete body i za příklad 2a, protože z nerovnosti v 2b samozřejmě plyne nerovnost v 2a.