

## Domácí úkol z Kombinatoriky a grafů I

třetí série, verze pro cvičení ve čtvrtek 12:20

Termín odevzdání: nejpozději ve čtvrtek 13. 3. ve 12:20.

Čísla ve čtverečku jsou počty bodů.

Symbol  $[n]$  označuje množinu čísel  $\{1, 2, \dots, n\}$ .

1. Pro následující posloupnosti čísel najděte jejich vytvořující funkce. Výsledek vyjádřete v uzavřeném tvaru, tj. vzorečkem bez použití nekonečných sum.

- 1 (a) posloupnost  $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ , kde  $a_n = n2^n$ .
- 1 (b) posloupnost  $(b_n)_{n=0}^{\infty}$ , kde  $b_n = \binom{n}{10}$ .
- 2 (c) posloupnost  $(c_n)_{n=0}^{\infty}$ , kde  $c_n = n^3$ . Náповěda: pokud už umíte vyřešit předchozí příklad, může vám pomoci vztah  $n^3 = 6\binom{n}{3} + 6\binom{n}{2} + n$ .
- 2 (d) posloupnost  $(d_n)_{n=0}^{\infty}$ , kde  $d_n = \frac{1}{3^n}$  pro  $n$  sudé a  $d_n = 2^n + 1$  pro  $n$  liché.
- 2 (e) posloupnost  $(e_n)_{n=0}^{\infty}$ , kde  $e_n$  je definováno jako počet způsobů, jak lze číslo  $n$  vyjádřit jako součet pěti lichých čísel. Jinými slovy,  $e_n$  je počet uspořádaných pětic  $(n_1, \dots, n_5)$  takových, že  $n_1, \dots, n_5$  jsou lichá přirozená čísla, jejichž součet je  $n$ . Náповěda: vzorec pro  $e_n$  znát nemusíte, stačí vzorec pro vytvořující funkci.

*Následující příklad je převzatý z předchozí série. Pokud jste některou jeho část už vyřešili, tak ji samozřejmě už znovu odevzdávat nemusíte.*

- 1.5+1.5 2. Označme  $r(n)$  počet rovinných grafů na množině vrcholů  $[n]$  a  $g(n)$  počet všech grafů na množině vrcholů  $[n]$ . Dokažte, že pro každé dostatečně velké  $n$  platí

$$r(\lfloor n^{1.999} \rfloor) < g(n) < r(n^2).$$

Za každou nerovnost můžete dostat 1.5 bodu. Zdá-li se vám to těžké, zkuste aspoň dokázat obdobné nerovnosti, ve kterých funkci  $\lfloor n^{1.999} \rfloor$  (nebo  $n^2$ ) nahradíte nějakou jinou funkcí, pokud možno co největší (resp. co nejmenší).