Domácí úkoly z Kombinatoriky a grafů I

- Řešení domácích úkolů posílejte mailem na adresu jelinek@iuuk.mff.cuni.cz.
- Na odevzdání řešení není žádný časový limit.

Příklad 1. Pro každou z následujících posloupností určete její vytvořující funkci. (půl bodu za každou posloupnost)

a) $0, 1, 0, 3, 0, 5, 0, \ldots, 0, 2k+1, 0, \ldots$

b) $1, 1+\frac{1}{2}, 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}, 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}, \ldots, \sum_{i=0}^{n}\frac{1}{2^i}, \ldots$

c) $0, -1, 4, -9, \ldots, (-1)^n n^2, \ldots$

Příklad 2. Nechť $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ je posloupnost taková, že $a_0 = 1$ a pro každé $n \geq 2$ platí $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$. Jakou hodnotu musí mít a_1, aby platilo, že $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$? (1 bod)

Příklad 3. Nechť $S = (G, z, s, c)$ je toková síť. Předpokládejme, že v této síti existuje aspoň jeden tok kladné velikosti. Rozhodněte, která z následujících tvrzení jsou pravdivá. Pravdivá tvrzení dokažte, pro nepravdivá tvrzení najděte protipříklad. (půl bodu za každé tvrzení)

a) Pokud je kapacita každé hrany S racionální číslo, tak i velikost maximálního toku v S je racionální číslo.

b) Pokud je kapacita každé hrany S racionální číslo, tak pro libovolný maximální tok f a libovolnou hranu e platí, že $f(e)$ je racionální.

c) Jestliže e je hrana, jejíž koncový vrchol je z nebo jejíž počáteční vrchol je s, tak pro každý maximální tok f platí $f(e) = 0$.

d) V síti S existuje aspoň jeden maximální tok f takový, že pro každou hranu e, na níž má f kladný průtok, existuje orientovaná cesta P ze z do s obsahující hranu e taková, že na všech hranách P má f kladný průtok.

Příklad 4. Nechť $(X, \mathcal{P})$ je konečná projektivní rovina s množinou bodů X a množinou přímek $\mathcal{P}$. Protože každá přímka $p \in \mathcal{P}$ je množina bodů, tvoří množina přímek $\mathcal{P}$ množinový systém. Dokažte, že $\mathcal{P}$ má systém různých reprezentantů. (1 bod)

Příklad 5. Nechť M je matice, jejíž prvky mají všechny hodnotu 0 nebo 1. Pojem *linie matice* M označuje buď sloupec nebo řádek M. Nechť k je libovolné přirozené číslo. Dokažte, že pokud v matici M nelze nalézt k jedniček, z nichž žádné dvě neleží ve stejné linii, potom M má $k-1$ linií, které dohromady obsahují všechny jedničky z M. (2 body)

Příklad 6. Symbolem $\vec{K}_n$ označme úplný orientovaný graf na n vrcholech, tj. orientovaný graf, který pro každé dva různé vrcholy u a v obsahuje obě orientované hrany (u, v) i (v, u).

a) Ukažte, že pro každé $N \in \mathbb{N}$ je možné obarvit orientované hrany $\vec{K}_N$ dvěma barvami tak, že nevznikne žádný podgraf izomorfní $\vec{K}_{10}$, jehož orientované hrany by měly všechny stejnou barvu. (1 bod)

b) Ukažte, že pro každé $b \in \mathbb{N}$ a $n \in \mathbb{N}$ existuje $N \in \mathbb{N}$ takové, že když libovolně obarvíme orientované hrany $\vec{K}_N$ pomocí b barev, tak vždy bude existovat podgraf izomorfní $\vec{K}_n$ na jehož orientovaných hranách se vyskytují nejvýše dvě různé barvy. (1 bod)

Příklad 7. Najděte příklad nekonečného množinového systému $\mathfrak{M} = (M_i;\ i \in \mathbb{N})$, který splňuje Hallovu podmínku, ale nemá systém různých reprezentantů. (2 body)

Dokažte na druhou stranu, že když $\mathfrak{M} = (M_i;\ i \in \mathbb{N})$ je nekonečný množinový systém, v němž každá množina M_i je konečná, tak $\mathfrak{M}$ má systém různých reprezentantů právě tehdy, když splňuje Hallovu podmínku. (2 body)

Příklad 8. Rozhodněte, která z následujících tvzení jsou pravdivá. Pravdivá tvrzení dokažte, pro nepravdivá najděte protipříklad. (1 bod za každé tvrzení)

a) Pro každý vrcholově 2-souvislý graf G platí, že pro libovolné tři vrcholy $x, y, z \in V(G)$ existuje v G kružnice, která tyto tři vrcholy obsahuje.

b) Pro každý vrcholově 2-souvislý graf G platí, že když x a y jsou dva různé vrcholy G a P je libovolná cesta spojující x a y, tak v G existuje cesta Q spojující x a y, která je vnitřně vrcholově disjunktní s P.

c) Jestliže G je vrcholově 2-souvislý graf, tak pro každou čtveřici různých vrcholů $\{x, x', y, y'\}$ existují v G dvě vrcholově disjunktní cesty, které vedou buď z x do y a z x' do y', nebo z x do y' a z x' do y.

Příklad 9. Pro následující grafy určete, jakou mají vrcholovou a hranovou souvislost. (1 bod za každý graf)

a) Úplný bipartitní graf $K_{m,n}$.

b) Graf vzniklý z úplného grafu K_{2n} smazáním n vrcholově disjunktních hran.

c) Graf na vrcholech $\{1, 2, \ldots, n\}$ pro $n \geq 5$, kde dva vrcholy i, j jsou spojené hranou, právě když $|i - j| \in \{1, 2, n-1, n-2\}$.

Příklad 10. Připomeňme, že $k_v(G)$, $k_e(G)$ a $\delta(G)$ označují vrcholovou souvislost G, hranovou souvislost G a minimální stupeň G. Najděte graf G splňující $k_v(G) = 15$, $k_e(G) = 42$ a $\delta(G) = 138$. (1 bod)