8. CVIČENÍ Z ADS 1, ČTVRTEK 15:40, LS '24

Vyhledávací stromy: AVL a (a, b)-stromy

1. *(a, b)-stromy a volba b.* Odhalte, jak závisí složitost operací s (a, b)-stromy na parametrech a a b. Z toho odvoďte, že se nikdy nevyplatí volit b výrazně větší než $2a$.

2. *(a, b)-join.* Navrhněte operaci Join(X, Y), která dostane dva (a, b)-stromy X a Y a sloučí je do jednoho. Můžete se přitom spolehnout na to, že všechny klíče z X jsou menší než všechny z Y. Za tohoto předpokladu zkuste dosáhnout složitosti $O(\log |X| + \log |Y|) = O(\max\{\log |X|, \log |Y|\})$.

3. *Lineární konstrukce.* Ukažte, že pokud budeme do prázdného (a, b)-stromu postupně vkládat klíče $1, \ldots, n$, provedeme celkem $\Theta(n)$ operací. K tomu si potřebujeme pamatovat, ve kterém vrcholu skončil předchozí vložený klíč, abychom nemuseli pokaždé hledat znovu od kořene.

4. *Intervalový update aneb ať žije (chytrá!) lenost.* Mějme BVS reprezentující slovník dvojic (klíč, hodnota), přičemž hodnoty jsou číselné. Upravte jej, aby podporoval operaci add(x, y, δ), která k hodnotám všech klíčů v intervalu $[x, y]$ přičte δ. Tato operace má běžet v $O(\log n)$, takže nemusíme hned provést aktualizaci hodnot všech klíčů v daném intervalu, stačí když Find(k) vrátí správnou hodnotu klíče k.

5. *Okénkový medián.* Máme dáno přirozené k a poté na vstupu přicházejí čísla (jako posloupnost délky mnohem větší než k). Kdykoliv přijde další, vypište medián z posledních k čísel (medián je $\lceil k/2 \rceil$-tý nejmenší prvek). Dosáhněte časové složitosti $O(\log k)$ na operaci.

6. *Jednosměrné operace.* Navrhněte úpravu operací Insert a Delete do (a, b)-stromů, aby operace procházely stromem pouze od kořene dolů a nebylo nutné jít zpět. Předpokládejte $b \geq 2a$.

7. *Jen jeden bit pro AVL.* V AVL stromu je potřeba udržovat v každém vrcholu znaménko $\{-, 0, +\}$ (udávající rozdíl hloubek podstromů), na což jsou potřeba dva bity. Ukažte, že existuje způsob, jak si vystačit s jedním bitem na vrchol.

Bonusové úlohy:

8. *Malé zaplnění.* Nevýhodou (a, b)-stromů je, že plýtvají pamětí – může se stát, že vrcholy jsou zaplněné jen z poloviny. Navrhněte úpravu, která zaručí zaplnění z alespoň $2/3$, až na zaokrouhlování (uvažujte velké a, b) a kromě kořene.

9. *Levá liána a dokonalé vyvažování pomocí rotací.* Ukažte, jak pomocí rotací převést libovolný BVS na cestu, kde v kořeni je maximum, v listu minimum a každý vnitřní vrchol má jen levého syna. Jak poté v lineárním čase převést tuto cestu na dokonale vyvážený BVS, opět jen pomocí rotací?