

5. CVIČENÍ Z ADS 1, ČTVRTEK 15:40, LS '24

Hledání nejkratších cest a záporných cyklů s Dijkstrou, Bellmanem a Fordem

1. *Rozcvička.* Lze se v algoritmech na hledání nejkratší cesty zbavit záporných hran tím, že ke všem ohodnocením hran přičteme nějaké velké číslo K ?
2. *Maximalizace minima.* Mějme mapu města ve tvaru orientovaného grafu. Každou hranu ohodnotíme podle toho, jaký nejvyšší kamion po dané ulici může projet. Po cestě tedy projede maximálně tak vysoký náklad, kolik je minimum z ohodnocení jejích hran. Jak pro zadané dva vrcholy najít cestu, po níž projede co nejvyšší náklad?
3. *Nejpravděpodobnější cesta.* Počítačovou síť popíšeme orientovaným grafem, jehož vrcholy odpovídají routerům a hrany linkám mezi nimi. Pro každou linku známe pravděpodobnost toho, že bude funkční. Pravděpodobnost, že bude funkční nějaká cesta, je dána součinem pravděpodobností jejích hran. Jak pro zadané dva routery najít nejpravděpodobnější cestu mezi nimi?
4. *Hrany na nejkratších cestách.* Vymyslete algoritmus, který nalezne všechny hrany, jež leží na alespoň jedné nejkratší cestě mezi vrcholy s a t . Můžete uvažovat varianty podle toho, jestli máme nebo nemáme záporné hrany. Předpokládejte však, že záporné cykly v grafu nejsou.
5. *Jak dědeček z MFF měnil, až vyměnil.* Směnárna obchoduje s n měnami (měna číslo 1 je koruna) a vyhláší matici kurzů K . Kurz K_{ij} říká, kolik za jednu jednotku i -té měny dostaneme jednotek j -té měny. Vymyslete algoritmus, který zjistí, zda existuje posloupnost směn, která začne s jednou korunou a skončí s více korunami.
6. *BF a záporné cykly.* Upravte Bellmanův-Fordův algoritmus, aby uměl detekovat záporný cyklus dosažitelný z vrcholu v_0 . Uměli byste tento cyklus vypsát?
7. *Další varianty relaxačního metaalgoritmu.* Uvažme následující dva relaxační algoritmy:
 - a) Provedeme n fází, v každé zrelaxujeme všechny vrcholy s ohodnocením $h(v) < \infty$.
 - b) Provedeme n fází, v každé projdeme všechny hrany uv a pokud $h(v) < h(u) + \ell(uv)$, tak snížíme $h(v)$.Spočtou tyto algoritmy vzdálenosti z v_0 na grafu bez záporných cyklů? Jakému algoritmu se podobají?

Bonusové úlohy:

8. *Dijkstra se zápornými hranami II.* Najděte příklad grafu s ohodnocenými hranami, ale bez záporných cyklů, na němž Dijkstrův algoritmus poběží exponenciálně dlouho. (Hint: příklad vyžaduje velká čísla.)

9. „*Jednoduché*“ *nerovnice.* Pro proměnné x_1, \dots, x_n máme danu sadu nerovnic tvaru $x_i - x_j \leq c_{ij}$, kde $c_{ij} \in \mathbb{R}$ je nějaká konstanta (ne nutně kladná). Jak najít nějaké řešení, tedy ohodnocení proměnných splňující všechny nerovnice, popř. zjistit, že žádné neexistuje?