

4. CVIČENÍ Z ADS 1, ČTVRTEK 15:40, LS '24

TU, silná souvislost, Dijkstrův algoritmus na hledání nejkratších cest

1. *Jednoznačnost TU.* Jakou vlastnost má orientovaný graf, jehož topologické pořadí (uspořádání) je jednoznačné?

2. *Nejdelší cesty.* Na vstupu máme acyklický orientovaný graf (DAG) s nezápornými délkami hran $\ell : E \rightarrow \mathbb{R}^+$. Pro dané dva vrcholy u a v nalezněte počet nejdelší cest z u do v (a jejich délku, definovanou jako součet $\ell(e)$ přes hrany e na cestě).

3. *Silně souvislá orientace.* Ukažte, že v každém neorientovaném grafu *bez mostů* je možné hrany zorientovat tak, aby výsledný graf byl silně souvislý. Dává důkaz i efektivní algoritmus?

Dále se budeme zabývat nejkratšími cestami:

4. *Dijkstra se zápornou hranou.* Najděte (orientovaný ohodnocený) graf s jednou zápornou hranou a bez záporného cyklu, na němž Dijkstrův algoritmus „selže“, tedy buď nenajde nejkratší cestu nebo musí otevřít nějaký vrchol opakovaně.

5. *Ohodnocení vrcholů.* Na mapě města jsme přiřadili každé silnici čas na průjezd a každé křižovatce průměrnou dobu čekání na semaforech. Jak hledat nejrychlejší cestu?

6. *Dvě kritéria.* Silnice v mapě máme ohodnocené dvěma čísly: délkou a mýtem (poplatkem za projetí). Jak najít nejlevnější z nejkratších cest?

7. *Hledání spojení.* V Tramtárii jezdí po železnici samé rychlíky, které nikde po cestě nestaví. V jízdním řádu je pro každý rychlík uvedeno počáteční a cílové nádraží, čas odjezdu a čas příjezdu. Nyní stojíme na nádraží S a chceme se co nejrychleji dostat na nádraží T . Navrhněte algoritmus, který najde takové spojení.

Bonusové úlohy:

8. *Zelený cyklus.* Mějme orientovaný graf, v němž jsou nějaké vrcholy obarveny zeleně. Jak zjistit, jestli v něm existuje cyklus, který obsahuje zelený vrchol.

9. *Maximalizace minima.* Mějme mapu města ve tvaru orientovaného grafu. Každou hranu ohodnotíme podle toho, jaký nejvyšší kamion po dané ulici může projet. Po cestě tedy projede maximálně tak vysoký náklad, kolik je minimum z ohodnocení jejích hran. Jak pro zadané dva vrcholy najít cestu, po níž projede co nejvyšší náklad?