5. CVIČENÍ Z ÚVODU DO APROXIMACÍ

LPéčka se vrací a s nimi přichází zaokrouhlování

Příklad první Uvažme problém Balancování grafu, kde na vstupu je neorientovaný graf G s váhami na hranách $p\colon E(G) \to \mathbb{R}^+$. Cílem algoritmu je zorientovat všechny hrany tak, že ten nejtěžší vrchol (vrchol s největší vahou hran orientovaných k němu) má co nejmenší možnou váhu. Formálně je náš cíl najít orientaci hran, které minimalizuje účelovou funkci $u = \max_{v \in V} \sum_{e \in E; e \text{ orientována do } v} p(e)$.

Formulujte celočíselný program pro Balancování grafu, zrelaxujte ho a navrhněte 2-aproximační zaokrouhlování.

Příklad druhý Nyní uvažme problém Max orientovaný řez – na vstupu dostaneme orientovaný graf $G = (V, \vec{E})$ s nezápornými vahami na hranách, a cílem je najít podmnožinu vrcholů S takovou, že $\vec{E}(S, V \setminus S)$ (hrany vedoucí z S do zbytku, ale ne opačné) mají co největší váhu.

Navrhněte pravděpodobnostní $\frac{1}{4}$-aproximační algoritmus pro Max orientovaný řez. (Tento algoritmus nepoužívá lineární programy.)

Příklad třetí Zkusme vymyslet lepší algoritmus pro Max orientovaný řez:

1. Navrhněte $\{0,1\}-$celočíselný program, který řeší Max orientovaný řez. Použijte proměnné y_{ij} pro hrany a proměnné x_i pro vrcholy – a správně je propojte.
2. Vyberme každý vrchol v_i s pravděpodobností $1/4 + x_i^*/2$, kde x_i^* je optimální řešení lineární relaxace celočíselného programu z podbodu 1. Dostaneme s toutou volbou 1/2-aproximaci?

Příklad čtvrtý Připomeňte si celočíselný program pro Max Sat a jeho lineární relaxaci. Na přednášce jste viděli 3/4-aproximační algoritmus pro Max Sat, založený na výběru lepšího ze dvou řešení, z čehož jedno řešení bylo založené na zaokrouhlování této lineární relaxace. Lepším zaokrouhlováním lineární relaxace se lze vyhnout výběru ze dvou řešení při zachování aproximačního poměru 3/4.

Najděte instanci, tedy množinu klauzulí, takovou, že pro optimum relaxace OPT_r a optimum instance OPT platí $\mathrm{OPT} = (3/4)\mathrm{OPT}_r$. To ukazuje, že pomocí této lineární relaxace nedostaneme lepší než 3/4-aproximační algoritmus. (Největšímu možnému poměru mezi OPT_f a OPT se říká celočíselná mezera, v angličtině integrality gap.)

Hint: stačí 2 proměnné a 4 klauzule. Optimum relaxace je splní všechny, kdežto celočíselné optimum splní jen 3 klauzule.

Příklad pátý Uvažujme problém Pokryj co nejvíc. Na vstupu dostaneme n – velikost univerza $U = \{1, 2, \ldots, n\}$, a také seznam m podmnožin univerza, čili vypsané množiny $S_1, S_2, \ldots, S_m$, kde každá S_i je podmnožinou U. Na vstupu také dostaneme číslo $k \leq m$.

Úkolem algoritmu je vybrat k podmnožin S_i tak, aby vybraných k podmnožin pokrývalo co nejvíc prvků univerza.

1. Zformulujte problém Pokryj co nejvíc jako celočíselný lineární program.
2. Navrhněte randomizovaný aproximační algoritmus pro Pokryj co nejvíc na základě zaokrouhlování lineárního programu. Proveďte jeho analýzu a odvoďte aproximační poměr. Tentokrát nevíte, jaký přesný poměr má vyjít – což většinou dopředu není známo. Pozor na to, že zaokrouhlování musí vybrat maximálně k množin.