

### 3. CVIČENÍ Z ÚVODU DO APROXIMACÍ

lineární programování v kostce

**PŘÍKLAD PRVNÍ** *Úvodní příklad:* Polární výprava se chystá na expedici a snaží se nabalit co nejkaloričtější jídlo, má však k dispozici jen 5 000 Kč. Navrhněte lineární program, který najde nejkaloričtější kombinaci, pokud lze vybírat z následujících potravin:

Potravina	Cena za 100 g	Kcal na 100 g
Sýr	20	320
Chléb	4	120
Vysočina	16	500
Vepřová plec	19	240

**PŘÍKLAD DRUHÝ** Zformulujte lineární program na hledání maximálního toku z  $s$  do  $t$  v síti. Síť je dána orientovaným grafem  $G = (V, E)$ , kapacitami hran  $c$  (hrana z  $u$  do  $v$  má kapacitu  $c_{uv} \geq 0$ ), zdrojem  $s$  a stokem  $t$ .

Dále se budeme zabývat *celočíselnými lineárními programy* (CLP), tedy lineárními programy, které navíc mají podmínku, že proměnné mohou nabývat jen celočíselných hodnot.

**PŘÍKLAD TŘETÍ** *Rozcvička s batohem!*

Zformulujte problém batohu pomocí CLP. Tedy pro předměty, kde každý má nějakou hmotnost  $h_i$  a cenu  $c_i$ , máme batoh s danou nosností  $H$  a snažíme se do něj naskládat předměty tak, abychom maximalizovali jejich cenu.

**PŘÍKLAD ČTVRTÝ** V problému MINIMÁLNÍHO VRCHOLOVÉHO POKRYTÍ hledáme co nejmenší množinu vrcholů takovou, že každá hrana grafu je pokrytá, čili alespoň jeden její konec je v pokrytí.

- Formulujte tento problém jako celočíselný program.
- V optimalizačních metodách se často převede celočíselný program na lineární program, tzv. relaxaci, a pak se řeší tato relaxace (v polynomiálním čase). Nás ale zajímají jen celočíselná řešení. Vymyslete jednoduchý způsob, jak z řešení lineární relaxace z předchozího bodu dostanete celočíselné *přípustné* řešení, které zároveň bude 2-aproximací.

**PŘÍKLAD PÁTÝ** Zformulujte celočíselný program pro NP-úplný problém 3-PARTITION: Máme množinu přemětů  $p_1, \dots, p_{3k}$  s cenami  $c_1, \dots, c_{3k}$  a chceme zjistit, zda-li z nich lze vytvořit trojice takové, že každá trojice má vždy stejný součet  $S$ .

**PŘÍKLAD ŠESTÝ** Student Tomáš Pilný dostal na cvičení zadaný úkol:

*Navrhněte celočíselný program pro hledání nejkratší Hamiltonovské kružnice, čili pro daný ohodnocený graf  $G = (V, E, w)$ , kde  $w(e) \geq 0$  je délka hrany  $e$ , chceme najít kružnici s nejkratší délkou, jež navštíví každý vrchol právě jednou.*

Tomáš navrhuje následující řešení:

„Pro každou hranu  $uv$  máme proměnnou  $x_{uv} \in \{0, 1\}$ , cílová funkce je  $\min \sum_{uv \in E} w(uv)x_{uv}$  a pro každý vrchol  $u$  máme podmínku  $\sum_{v|uv \in E} x_{uv} = 2$ .“

Funguje toto řešení? Pokud ano, zdůvodněte, pokud ne, zdůvodněte a ještě vymyslete lepší.

**PŘÍKLAD SEDMÝ** Určitě vás napadlo, že Sudoku lze řešit triviálním programem, který prostě projde všechny možnosti (tedy backtrackingem, DFS, ...). Dokázali byste popsat luštění Sudoku jako úlohu celočíselného programování?