1. CVIČENÍ Z ÚVODU DO APROXIMACÍ

pravděpodobnost, základní výbava informatika

Příklad první Osmkrát hodíme spravedlivou mincí, na které padne panna s pravděpodobností přesně 0.5. Určete pravděpodobnosti následujících jevů (stačí jako výraz, tj. mocniny, sumy, kombinační čísla, faktoriály apod. nemusíte vyhodnocovat):

a) Počet hodů, při nichž padne panna, je roven počtu hodů, kdy padl orel.
b) Víckrát padne panna než orel.
c) i-tý hod a $(9-i)$-tý hod jsou stejné pro $i = 1, \ldots, 4$.
d) Alespoň čtyřikrát za sebou padne panna. (Hint: nejprve zkuste vyřešit menší počet hodů.)
e) * Jak bychom spočítali pravděpodobnost, že alespoň čtyřikrát za sebou padne panna, pro n hodů?

Příklad druhý Alice a Bob chtějí rozhodnout, kdo zaplatí za lístky do kina. Alice má v kapse tři zvláštní hrací kostky (na nichž každá ze 6 stěn padne s pravděpodobností 1/6):

I s čísly na stěnách 1, 1, 6, 6, 8, 8,
II s čísly na stěnách 2, 2, 4, 4, 9, 9,
III s čísly na stěnách 3, 3, 5, 5, 7, 7,

Alice navrhuje následující: Každý si vybere jednu kostku a hodí jí, lístky pak koupí ten, komu padne vyšší číslo. Navíc ještě dovolí Bobovi, aby si vybral kostku první.

Pomozte Bobovi dokázat, že v této hře má větší šanci zvítězit Alice, tedy ukažte následující:

a) Pokud by si Bob vybral kostku I, Alice vezme kostku II a šance, že Alici padne vyšší číslo, je větší než 0.5. Zkuste sepsat všechny možné jevy, které mohou nastat.
b) Pokud by si Bob vybral kostku II a Alice kostku III, opět bude pravděpodobnost výhry Alice vyšší než 0.5.
c) A nakonec, pokud by si Bob vybral kostku III a Alice kostku I, tak Alici padne vyšší číslo s pravděpodobností vyšší než 0.5.

Takže Bob jako první nemůže vybrat žádnou kostku, která by mu zaručila výhru, protože každá kostka je „dominována“ nějakou jinou kostkou.

Příklad třetí Mějme falešnou („cinknutou“) minci, na které padá panna s *neznámou* pravděpodobností p. Pomocí několika hodů simulujte jeden hod spravedlivou mincí. Jaká je střední hodnota počtu hodů falešnou mincí?

Příklad čtvrtý Nyní naopak chceme simulovat falešnou minci, na níž má padnout panna s pravděpodobností p, pomocí spravedlivé mince. V každém z následujících případů se snažte určit střední hodnotu počtu hodů spravedlivou mincí.

a) Začněte případem $p = \ell/2^k$ pro nějaká $k, \ell \in \mathbb{N}$.
b) Poté zkuste algoritmus rozšířit na jakékoliv racionální p.
c) Nakonec zkuste přijít na to, jak by to fungovalo pro libovolné p, tedy i iracionální. Můžete nejprve zkusit podstatně snížit počet hodů v předchozím případě.

Příklad pátý **Karetní triky.** Máme 52 karet (polovina červených, polovina černých) zamíchaných náhodně (rovnoměrně náhodná permutace). Pak odkrýváme karty jednu po druhé. Před každou kartou máte možnost říci „tuhle kartu chci“. Když ji chcete, tak ji odkryjeme a pokud je červená, vyhrajete. Zajímá nás pravděpodobnost, že váš algoritmus vyhraje.

a) Jaká je pravděpodobnost výhry algoritmu $Prv \equiv$ „vždy zkusím první kartu“? A co $Pos \equiv$ „vždy zkusím poslední kartu“?
b) Zkusme přijít na „lepší“ algoritmus, než naivní Pos. „Lepší“ teď myslíme v následujícím smyslu:

nalezněte algoritmus L, který má pravděpodobnost vyšší než $1/2$, že ukáže na červenou, když Pos ukáže na černou. Jaký je zásadní problém s touto relací?

c) Náš hlavní úkol: nalezněte algoritmus, který zvolí červenou kartu s větší pravděpodobností, než Prv nebo Pos, nebo dokažte, že žádný takový algoritmus neexistuje.