

7. CVIČENÍ Z OPTIMALIZACE

Simplexová metoda

Úloha LP v rovnicovém tvaru: $\max c^T x$ za podmínek $Ax = b, x \geq 0$.

D: *Báze* je množina indexů proměnných $B \subseteq \{1, \dots, n\}$ taková, že A_B je regulární (A_B značí podmatici A indexovanou sloupci z B).

Bázické řešení x odpovídající B je řešení $Ax = b$, pro které platí: $\forall i \notin B : x_i = 0$.

Přípustná báze je taková, že odpovídající bázické řešení x je přípustné, tedy $x \geq 0$.

Pivotovací pravidla (některá):

- největší koeficient – vstupní proměnná bude ta, která má v aktuální účelové funkci největší koeficient.
- největší přírůstek – zvolíme vstupní proměnnou, která povede k největšímu možnému přírůstku účelové funkce.
- nejstrmější hrana – vybereme vstupující proměnnou, jejímž zavedením do báze se průběžné bázické přípustné řešení posune ve směru, který svírá nejmenší úhel s vektorem c . Chceme tedy maximalizovat $\frac{c^T \cdot (x' - x)}{\|c\| \cdot \|x' - x\|}$, kde x je aktuální bázické přípustné řešení a x' je řešení, které bychom dostali vstupem uvažované zlepšující proměnné do báze.
- Blandovo pravidlo (nejmenší index) – vybereme vstupující proměnnou s nejmenším možným indexem.

PŘÍKLAD PRVNÍ Pomocí simplexové metody nalezněte nejprve přípustné bázické řešení a následně i optimální řešení následující úlohy:

$$\begin{aligned} \max & 4x_1 - 2x_2 + 7x_3 \\ & 5x_1 + x_2 - 2x_3 \leq 12 \\ & -x_1 - x_2 + x_3 \leq -1 \\ & 2x_1 + x_2 \leq 4 \\ & x_1 + x_3 \leq 4 \\ & x_1, \dots, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

PŘÍKLAD DRUHÝ Nalezněte počáteční bázické přípustné řešení pomocí simplexového algoritmu (na jiném LP). Podařilo se vám ho najít do 3 kroků?

$$\begin{aligned} \max & 4x_2 - x_4 \\ & 3x_1 + x_2 - 2x_4 = 5 \\ & -x_2 + x_3 = -2 \\ & -2x_1 + 8x_2 + x_3 = 2 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{aligned}$$

PŘÍKLAD TŘETÍ

Aplikujte simplexovou metodu. V nějaké chvíli by již nemělo být možné pokračovat. Proč se algoritmus zastavil? Závísí tento problém na účelové funkci, nebo jen na mnohostěnu?

- Optimalizujte funkci $\max 3x_1 + x_2$ na mnohostěnu P :

$$\begin{aligned}x_1 - x_2 &\leq -1 \\ -x_1 - x_2 &\leq -3 \\ 2x_1 - x_2 &\leq 2 \\ x_1, x_2 &\geq 0.\end{aligned}$$

- Optimalizujte funkci $\max 4x + 5y + 3z$ na mnohostěnu P :

$$\begin{aligned}x + y + 2z &\geq 20 \\ 5x + 6y + 5z &\leq 50 \\ x + 3y + 5z &\leq 30 \\ x, y, z &\geq 0\end{aligned}$$

PŘÍKLAD ČTVRTÝ

Vyřešte simplexovou metodou:

$$\begin{aligned}\max 5x_1 - 19x_2 - 3x_3 - 4x_4 \\ x_5 &= -0.5x_1 + 2x_2 + 0.5x_3 - 4x_4 \\ x_6 &= -0.5x_1 + 4x_2 + 1x_3 - x_4 \\ x_7 &= 1 - x_1 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 &\geq 0\end{aligned}$$

Jako pivotovací pravidlo použijte Blandovo pravidlo. Poté spočítejte stejnou úlohu pomocí pravidla “největší koeficient”.

PŘÍKLAD PÁTÝ

Najděte všechny vrcholy s optimálním řešením následujícího LP:

$$\begin{aligned}\max 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 4x_4 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 &\leq 5 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 &\leq 3 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + 7x_4 &\geq 3 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 &\geq 0\end{aligned}$$