3. CVIČENÍ Z OPTIMALIZAČNÍCH METOD

Linearita, afinita, konvexita … prostě geometrie

D: *Afinní prostor* $A \subseteq \mathbb{R}^d$ má tvar $L + v$ pro nějaký lineární prostor L a posuvný vektor $v \in \mathbb{R}^d$. *Dimenze* afinního prostoru A je rovna $\dim L$.

D: *Afinní kombinace* vektorů $v_1, v_2, \dots v_n$ je vektor $\sum_{i=1}^n \alpha_i v_i$, kde α_i splňují $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 1$.

D: *Nadrovina* je libovolný afinní prostor v $\mathbb{R}^d$ dimenze $d-1$. V rovině tedy je každá přímka nadrovinou, v 3D prostoru je nadrovinou libovolná rovina, atd.

Platí, že každou nadrovinu lze vyjádřit jako $\{x \in \mathbb{R}^d \mid c^T x = b\}$, kde $c \in \mathbb{R}^d$ a $b \in \mathbb{R}$. Zároveň každá rovnice $c^T x = b$ pro $c \neq o$ určuje nadrovinu.

Nadrovina rozděluje prostor $\mathbb{R}^d$ na dva (uzavřené) *poloprostory.*

T: Množina $A \subseteq \mathbb{R}^d$ je afinní podprostor, právě když $A = \{x \in \mathbb{R}^d \mid Cx = b\} \neq \emptyset$ pro nějakou matici $C \in \mathbb{R}^{d \times d}$ a nějaký vektor $b \in \mathbb{R}^d$.

D: Množina $K \subseteq \mathbb{R}^d$ se nazývá *konvexní množinou*, pokud $\forall x, y \in K, \forall t \in [0,1] : tx + (1-t)y \in K$. Jinak řečeno, každá úsečka se dvěma konci v K musí mít každý bod obsažený v K.

D: Vektor x je *konvexní kombinací* množiny vektorů $v_1, v_2, \dots v_n$ pokud $x = \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i$, kde α_i jsou reálná čísla splňující $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 1$ a navíc $\forall i : \alpha_i \in [0,1]$.

Množina bodů/vektorů $V \subseteq \mathbb{R}^d$ je *v konvexní poloze* („konvexně nezávislá“), pokud platí, že žádný vektor $v \in V$ není konvexní kombinací ostatních.

Příklad první *Z minula:* Student Tomáš Pilný dostal na cvičení z Optimalizace zadaný úkol:

Navrhněte celočíselný program pro problém obchodního cestujíciho, čili pro daný ohodnocený graf $G = (V, E, w)$, kde $w(e) \geq 0$ je délka hrany e, chceme najít Hamiltonovskou kružnici s nejkratší délkou. Hamiltonovská kružnice navštíví každý vrchol právě jednou.

Tomáš navrhuje následující řešení:

„Pro každou hranu uv máme proměnnou $x_{uv} \in \{0,1\}$, cílová funkce je $\min \sum_{uv \in E} w(uv) x_{uv}$ a pro každý vrchol u máme podmínku $\sum_{v | uv \in E} x_{uv} = 2$.“

Funguje toto řešení? Pokud ano, zdůvodněte, pokud ne, zdůvodněte a ještě vymyslete lepší.

Příklad druhý Nechť $A \subseteq \mathbb{R}^n$ je afinní prostor. Z definice je pak A tvaru $A = L + v$ pro nějaký lineární prostor L a nějaký vektor v. Dokažte, že existuje právě jeden lineární prostor $L \subseteq \mathbb{R}^n$ takový, že $A = L + v$ pro nějaký vektor v.

Charakterizujte všechny vektory v, které posunou lineární prostor L na afinní prostor A.

Příklad třetí Dokažte následující ekvivalenci:

Množina $n+1$ vektorů $v_0, v_1, v_2, v_3, \dots, v_n \in \mathbb{R}^d$ je afinně nezávislá právě tehdy, když množina n vektorů $v_1 - v_0, v_2 - v_0, v_3 - v_0, \dots, v_n - v_0$ je lineárně nezávislá.

Hint: Zaměřte se na afinní závislost.

Příklad čtvrtý Rozhodněte, zda $U = V$ pro afinní prostory U, V definované takto:

$$U = (1,0,0)^T + \operatorname{span}\{(1,2,1)^T, (2,1,0)^T\},$$
$$V = (2,-1,-1)^T + \operatorname{span}\{(0,3,2)^T, (3,0,-1)^T\}.$$

Příklad pátý

1. Mohou se dvě dvoudimenzionální roviny (prostě klasické roviny) protínat v jednom bodě, pokud jsme v prostoru $\mathbb{R}^4$?
2. Mohou se dva prostory dimenze 3 protínat v $\mathbb{R}^5$ v jednom bodě?

Domácí úkoly

Deadline na odevzdání je začátek cvičení za 14 dní od zadání.

Čtvrtý domácí úkol **[2 body]**
Dokažte nebo najděte protipříklad pro následující tvrzení hovořící o chování lineárního, afinního a konvexního obalu vůči posunutí, kde $M \subseteq \mathbb{R}^n$ a tvrzení má platit pro každý vektor $u \in \mathbb{R}^n$:

a) $\mathrm{span}(M) + u = \mathrm{span}(M + u)$,
b) $\mathrm{aff}(M) + u = \mathrm{aff}(M + u)$,
c) $\mathrm{conv}(M) + u = \mathrm{conv}(M + u)$.

Pro připomenutí: $\mathrm{span}(M)$ je lineární obal M, $\mathrm{aff}(M)$ je afinní obal M a $\mathrm{conv}(M)$ je konvexní obal M.