ŘEŠENÍ PŘÍKLADŮ Z LINEÁRNÍ ALGEBRY I.

Příklady 5b) a 6 na 14. cvičení, které jsme nestihli

1 Příklad 5b)

Nejprve najdeme matici zobrazení vůči kanonické bázi. Jelikož však nemáme zadané obrazy kanonické báze, ale jiné báze, nejprve najdeme obrazy kanonické báze. S využitím linearity F nám stačí jen eliminovat následující matici, která má v každém řádku v levé části vzory ze zadání a v pravé části jejich obrazy:

$$\left(\begin{array}{rrr|rr} 1 & 0 & 0 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & -1 & 0 & 3 \end{array}\right) \overset{\text{RREF}}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{rrr|rr} 1 & 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -3 \end{array}\right).$$

(Linearita nám zaručuje, že po provedení jakékoliv elementární řádkové úpravy bude pravá část řádku stále obrazem levé části.)

Nyní je matice zobrazení transpozicí pravé části RREF tvaru matice výše, tedy $\begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 3 & 1 & -3 \end{pmatrix}$.

Řádky matice zobrazení jsou lineárně nezávislé, čili hodnost matice je 2 a ta se rovná dimenzi obrazu. Dimenze jádra je tedy 1 (dimenze jádra plus dimenze obrazu je 3), což znamená, že zobrazení není prosté.

Pro získání báze jádra provedeme eliminaci matice zobrazení a vyjde nám $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Takže množina řešení $Ax = 0$ splňuje $x_1 = x_3, x_2 = 0$ a x_3 je její parametr, bázi jádra proto tvoří vektor $(1, 0, 1)$ (jde o koeficienty u x_3).

Jelikož obraz má dimenzi dva a zobrazení vede do $\mathbb{R}^2$, tak stačí vzít kanonickou bázi $\mathbb{R}^2$ jako bázi obrazu.

Obecnější postup: Využijeme, že obrazem (kanonické) báze jsou generátory obrazu a z nich vybereme 2 lineárně nezávislé vektory, čili bázi. Je vidět, že obrazy prvních dvou vektorů kanonické báze, konkrétně $(2, 3), (0, 1)$ jsou LNZ, takže tvoří bázi obrazu.

2 Příklad 6

Nechť $u + t \cdot v$, kde $u, v \in \mathbb{R}^n$ a $t \in \mathbb{R}$, je přímka v $\mathbb{R}^n$. Aby skutečně šlo o přímku, musí být $v \neq o$. (Díváme se na přímku jako na afinní podprostor dimenze jedna, tedy posunutý lineární podprostor, což je v tomto případě přímka procházející počátkem. Tedy, $t \cdot v$ je příslušný lineární podprostor a u je posun.)

Obraz přímky je $f(u + t \cdot v) = f(u) + t \cdot f(v)$, kde jsme využili linearitu zobrazení f. (Přesněji řečeno, toto je obraz bodu přímky pro nějaké t.)

Vidíme, že obraz přímky vypadá opět jako přímka. Nicméně, pokud by nastalo $f(v) = o$, pak o přímku nejde, ale obrazem přímky bude bod. Jelikož však $v \neq o$ a f je izomorfismus, tedy speciálně prosté zobrazení, nestane se, že $f(v) = o$, a obrazem přímky je tedy přímka. V důkaze jsme nevyužili nic jiného, než že f je lineární a prosté.