

6. CVIČENÍ Z LINEÁRNÍ ALGEBRY I.

Grupy a permutace

PŘÍKLAD PRVNÍ Rozhodněte, které z následujících struktur jsou grupy:

- a) $(2\mathbb{Z}, +)$
- b) $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \circ)$, kde $a \circ b = |ab|$
- c) (\mathbb{Q}, \circ) , kde $a \circ b$ je aritmetický průměr a, b
- d) množina reálných funkcí $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ se sčítáním
- e) množina otočení \mathbb{R}^2 podle počátku se skládáním
- f) množina $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & z \\ 0 & 1 \end{pmatrix} ; z \in \mathbb{Z} \right\}$ s maticovým násobením

PŘÍKLAD DRUHÝ Ukažte, že jednotkový prvek je v grupě určen jednoznačně.

PŘÍKLAD TŘETÍ Ukažte, že v každé grupě platí:

- a) $(a \circ b)^{-1} = b^{-1} \circ a^{-1}$
- b) $(a^{-1})^{-1} = a$

PŘÍKLAD ČTVRTÝ Spočítejte 3^{2016} v grupě $(\mathbb{Z}_5 \setminus \{0\}, *)$.

PŘÍKLAD PÁTÝ Pro následující permutace p, q určete grafy, cykly, rozklad na transpozice, počet inverzí, znaménko, inverzní permutace a jejich složení $p \circ q$ a $q \circ p$ u následujících permutací:

$$p = (6, 4, 1, 5, 3, 2), q = (6, 4, 3, 2, 5, 1)$$

PŘÍKLAD ŠESTÝ Mějme permutaci zadanou cykly:

$$p = (1, 3, 4)(2, 5)(6, 11, 10, 9, 8, 7)$$

Spočítejte p^9 a p^{-14} .

Pro jakou nejmenší mocninu $k \geq 1$ dostaneme $p^k = id$?