

5. CVIČENÍ Z LINEÁRNÍ ALGEBRY I.

Soustavy rovnic a matice

PŘÍKLAD PRVNÍ Vyřešte maticovou rovnici pro neznámou (regulární) matici X :

$$((X^{-1}A^{-1})^T - (B^T)^{-1})B^{-1} = 0,$$

kde $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ a $B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -4 \\ -5 & -4 & -6 \\ 3 & 10 & -2 \end{pmatrix}$.

PŘÍKLAD DRUHÝ Ukažte, že pokud $A^2 - A + I_n = 0$, pak matice A je regulární.

PŘÍKLAD TŘETÍ Dokažte následující vztahy pro reálné číslo α a matice A , B a C tvaru $n \times n$:

- $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$
- $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$
- $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$
- $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ (pro A, B regulární)
- $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$ (pro A regulární)

PŘÍKLAD ČTVRTÝ Invertujte následující blokové matice, tedy matic složených z jiných matic:

- $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$ pro $A \in \mathbb{R}^{m \times m}$ a $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ regulární.
- $\begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix}$ pro $A \in \mathbb{R}^{m \times m}$ a $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ regulární.
- $\begin{pmatrix} I & A & C \\ 0 & I & B \\ 0 & 0 & I \end{pmatrix}$ pro A, B, C čtvercové (ne nutně regulární).

PŘÍKLAD PÁTÝ Vymyslete, jak rychle mocnit matice, tedy jak co nejrychleji spočítat A^k pro velké k a čtvercovou matici A .