

NDMI025 – Pravděpodobnostní algoritmy

LS 2013 – Jiří Sgall

Domácí úkol 2 – 3. května

Termín: 21. května před přednáškou
Cvičení k tomuto úkolu budou 22. května

(1) Nechtě G je bipartitní (multi)graf na $2n$ vrcholech, který vznikne jako sjednocení d nezávislých uniformně náhodných párování na dvou daných partitách o n vrcholech. Dokažte, že existuje $c > 0$ a d takové, že G je s velkou pravděpodobností expander v následujícím smyslu: Každá množina vrcholů S z jedné partity o velikosti nejvýše $|S| \leq n/2$ má alespoň $(1 + c)|S|$ sousedů.

Nápověda: Můžete uvažovat o sousedech různých vrcholů jako o nezávislých, když zdůvodníte, proč to je korektní. Odhadněte pravděpodobnost, že každá S velikosti k expanduje; stačí poměrně hrubý odhad, ale je potřeba počítat trochu pečlivě pro k asymptoticky menší než n .

(2) Uvažujte náhodnou procházku na hyperkrychli dimenze n , s tím, že s pravděpodobností $1/2$ nejdeme nikam. Ukažte, že po $n \ln(n/\varepsilon)$ krocích z libovolné konfigurace je distribuce ε -blízká uniformní distribuci. (Případně stačí asymptotický výsledek.)

Nápověda: Použijte coupling.

(3) Uvažujme problém hledání 3-cestného řezu, tj. rozložení vrcholů grafu (V, E) na tři disjunktní třídy s cílem maximalizovat počet hran, které nemají oba vrcholy ve stejné třídě. Dokažte, že existuje třícestný řez, který obsahuje $2|E|/3$ hran. Navrhněte rychlý paralelní algoritmus, který takový řez najde.

Bonus: Najděte takový deterministický algoritmus.

(4) Mějme úplný binární strom hloubky $2n$ (tj. má 4^n listů). Vnitřní vrcholy a kořen jsou označeny střídavě po vrstvách MIN a MAX. Listy ohodnotíme 0 a 1. Strom vyhodnocujeme prohlédáváním do hloubky s tím, že u každého vnitřního vrcholu vyhodnotíme nejprve náhodný podstrom, a pokud hodnota MIN/MAX není určena, vyhodnotíme i druhý podstrom. Dokažte, že v průměru použijeme nejvýše 3^n hodnot listů.

Nápověda: Uvažujte o dvou hladinách stromu najednou.