NDMI025 – Pravděpodobnostní algoritmy

LS 2013 – Jiří Sgall

Domácí úkol 2 – 5. dubna

Termín: 16. dubna před přednáškou
Cvičení k tomuto úkolu budou 17. dubna

(1) V grafu G je na různých vrcholech kočka a myš. Každá podniká nezávislou náhodnou procházku (ale čas je synchronní, tj. v každém čase kočka i myš udělá jeden krok). Odhadněte očekávanou délku života myši, jestliže jí kočka sežere jakmile jsou ve stejném vrcholu. (Potkat na hraně se mohou bez následků.) Odhad by měl záviset na počtu hran a vrcholů.

(2) Stejné obecné zadání jako v předchozím případě. Spočítejte přesně očekávanou délku života myši v následujících případech:
(a) G je cyklus délky $2n$, kočka a myš začínají v maximální možné vzdálenosti.
(b) G je hyperkrychle dimenze k, kočka a myš začínají v maximální možné vzdálenosti.

(3) Počítáme nad $GF(2)$. Nechť A je čtvercová nenulová matice řádu n. Vezměme $x, y \in \{0,1\}^n$ nezávislé uniformně náhodné vektory. Dokažte, že $Pr_{x,y}[x^T Ay \neq 0] \geq 1/4$.
Platí totéž nad reálnými čísly pro $x, y \in \{0,1\}^n$?

(4) Počítáme nad $GF(2)$. Nechť $G : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$ je funkce taková, že $Pr_{x,y}[G(x+y) = G(x)+G(y)] \geq 1-\delta]$ pro nějaké malé $\delta > 0$ (třeba $\delta = 1/10$), kde $x, y \in \{0,1\}^n$ jsou nezávislé uniformně náhodné vektory. Definujme $H(z)$ jako častější výsledek výrazu $G(z+x) + G(x)$ pro $x \in \{0,1\}^n$. Dokažte, že funkce H je lineární.
Nápověda: Rozepište podle definice H výraz $H(z) + H(t)$ pro pevné z a t a dokažte, že se rovná $H(z+t)$ s nenulovou pravděpodobností. Nezapomeňte, že sčítání a odčítání nad $GF(2)$ je totéž; může se hodit, že pro $x, y \in \{0,1\}^n$ nezávislé uniformně náhodné vektory je $x + y$ uniformní.
Bonus: Pro dostatečně malé δ dokažte, že $Pr_x[G(x) = H(x)] \geq 1 - 3\delta$ a H je jediná lineární funkce s touto vlastností.