

# NDMI025 – Pravděpodobnostní algoritmy

## LS 2013 – Jiří Sgall

Domácí úkol 1 – 26. února

**Termín: 5. března před přednáškou**

Cvičení k tomuto úkolu budou 6. března

**Přednáška 12. března ani cvičení 13. března nebudou.**

(1) Předpokládejme, že je vhodným způsobem dáno reálné číslo  $x \in (0, 1)$ . Navrhněte (pod)program, který vrátí ANO s pravděpodobností přesně  $x$  a NE s pravděpodobností  $1 - x$  za předpokladu, že je k dispozici posloupnost nezávislých náhodných bitů s uniformním rozdělením. Uvedte, kolik bitů z posloupnosti čte Váš podprogram v nejhorsím a v průměrném případě. Rozlišete tři varianty:

- (a)  $x$  je tvaru  $i/2^n$ .
- (b)  $x$  je racionální, třeba  $1/3$  nebo  $7/13$ .
- (c)  $x$  je iracionální, třeba  $1/e$ .

(2) Hodíme devětkrát nezávisle náhodně standardní hrací kostkou čísla 1 až 6. Nechť  $x$  je celkový počet hozených bodů.

- (a) Spočítejte pravděpodobnost, že  $x > 27$ .
- (b) Spočítejte pravděpodobnost, že  $x$  je dělitelné třemi.

(3) Uvažte následující variantu kontrahujícího algoritmu pro MINCUT. Namísto provádění kontrakcí až do chvíle, kdy máme dva vrcholy, skončíme už ve chvíli, kdy máme  $t$  vrcholů. Ve výsledném grafu najdeme minimální řez deterministicky.

- (a) Jaká je pravděpodobnost úspěchu?
- (b) Jaké  $t$  byste zvolili, pokud Váš deterministický algoritmus potřebuje čas  $O(t^3)$  a kontrahující algoritmus je implementován v čase  $O(n^2)$ ?

(4) Hrajme následující hru. Napíšu si na kartičky dvě různá čísla a dám si do každé ruky jedno, uniformně náhodně. Vy si zvolíte ruku a ukážu Vám jedno číslo. Vy pak zvolíte, zda si číslo necháte nebo si vezmete číslo z druhé ruky. Jestliže Vaše číslo bude  $x$  a moje  $y$ , je Vaše výhra  $x - y$ . Tj. výše výhry nebo prohry je dána předem rozdílem dvou čísel; vyhraje ten, kdo má vyšší číslo, a druhý mu daný rozdíl zaplatí.

(a) Uvažte následující deterministickou strategii: Jestliže uvidíte číslo 21 nebo vyšší, necháte si ho, jinak vezmete druhé. Odvoďte střední hodnotu Vaší výhry v závislosti na mnou vybraných číslech  $x$  a  $y$ .

(b) Navrhněte pravděpodobnostní strategii takovou, že střední hodnota výhry bude vždy kladná.

(5 – bonus) Předpokládejte, že volím čísla takto: Pro  $i = 1, 2, \dots$  s pravděpodobností  $2^{-i}$  zvolím dvojici  $\{3^{i-1}, 3^i\}$ . Spočítejte pro dané  $i$  a situaci, kdy první číslo je  $3^i$  pravděpodobnost, že druhé číslo je  $3^{i-1}$  resp.  $3^{i+1}$ . Na základě toho pro každé  $i$  odvoďte předpokládanou výhru pro dvě deterministické strategie: “vždy si nechám první číslo” a “vždy si zvolím druhé číslo”. Vysvětlíte co nejlépe výběr vhodné celkové strategie a očekávaný průběh a výsledek hry.