NOPT048: Optimalizační metody - LS 2012 Jiří Sgall

Minimální popis mnohostěnu, simplexová metoda

23. 3. 2012, 5. přednáška *Zapsal: Marek Tlustý, Kateřina Nevolová*

Poslední změna: 16. června 2012

1 Minimální popis mnohostěnu

Definice 1. Minimální popis konvexního mnohostěnu

$$P = \{x | \underbrace{A'x = b'}_{m' \text{ rovnic}} \wedge \underbrace{A''x \leq b''}_{m'' \text{ nerovnic}}\}$$

Aby byl takový popis minimální, tak nelze vynechat žádnou rovnost ani nerovnost bez změny P a nelze změnit žádnou nerovnost na rovnost bez změny P.

Pozorování 2. *Pokud nelze změnit žádnou nerovnost na rovnost tak víme, že*

$$(*)(\exists \bar{x} \in P)(A''\bar{x} < b'')((\forall i) a_i''^T \bar{x} < b_i'')$$

Pozorování 3. *Pokud (*), pak* $\dim(P) = n - \operatorname{rank}(A')$.

Věta 4. *V minimálním popisu nerovnosti odpovídají vzájemně fasetám.*

Důkaz. **Nerovnost definuje fasetu:** Vezmeme-li příslušnou nerovnici, tak průnik s polytopem je stěna (je neprázdná $\implies$ je to tedy minimální popis). Je tato stěna faseta?

Stěna:

$$F = \{x | \underbrace{A'x = b' \wedge a_i''^T x = b_i''}_{m'+1 \text{ rovnic}} \wedge \underbrace{\bar{A}''x \leq \bar{b}''}_{\substack{\text{vynecháme i-tou nerovnici,} \\ \text{pak máme minimální popis stěny}}}\}$$

Opatříme si $\hat{x}$ tak, že $a_i''^T \hat{x} = b_i''$ a $a_j''^T \hat{x} < b_j''$, $j \neq i$.

Víme, že $\dim(F) = m - \operatorname{rank}(\text{matice rovnic})$, a že $\dim(F) \geq \dim(P) - 1$ (něco jsme vynechali z lineárního prostoru).

Dimenze se tedy nezmenší více než o 1. Nyní musíme tedy již jen dokázat, že se skutečně zmenší.

$\bar{x}$ nesplňuje $a_i''^T \bar{x} = b_i$, $\bar{x} \in P \subseteq L$, ale $\bar{x} \notin F$

$\bar{x} \notin L \cap \{x | a_i''^T x = b_i\}$ ... nový afinní prostor bez $\bar{x}$, ale zbytek stěny tam je

Faseta je rovna $P \cap \{x | a_i''^T x = b_i''\}$ pro nějaké i: (různé nerovnosti nemohou definovat stejnou fasetu) Mějme tedy $F \subseteq P$ fasetu, pak $(\exists i) F$ v tečné nadrovině $(\subseteq)$ $\{x | a_i''^T x = b_i''\}$. Kdyby F neleželo v tečné nadrovině, tak pro každou nalezneme $\bar{x} \in F$ tak, že $a_i''^T x < b_i'' \implies \dim(F) = \dim(P)$. Což je spor s tvrzením, že F je faseta.

Tedy $F = P \cap \{x | a_i''^T x = b_i''\}$, jinak by F muselo být vlastní stěnou a to by byl spor s tvrzením, že je fasetou $(\dim(F) \leq d - 2)$. □

Důsledek 1: Pokud $\dim(P) = n$, tak existuje jediný minimální popis P až na násobky nerovnic.

Důkaz. Afinní prostor dimenze $n - 1$ je dán jedinou rovnicí. □

Důsledek 2: Z důkazu triviálně víme, že každá vlastní stěna je obsažena v nějaké fasetě a dokonce, že každá vlastní stěna je průnikem faset.

Důkaz. Iterací postupu důkazu věty. □

1.1 Svaz stěn mnohostěnu

Stěny s relací podmnožiny tvoří **svaz**, což je částečné uspořádání, kde existují minima a maxima dvojic.

TODO obrázek

Minimum stěn je jejich průnik a nic neporovnatelného už pod nimi není, **maximum** je konvexní obal jejich sjednocení.

2 Simplexová metoda

LP v rovnicovém tvaru:

$$\begin{aligned} \text{maximalizuj} \quad & c^T x \\ \text{pro} \quad & x \geq 0 \\ \text{za podmínek} \quad & Ax = b \end{aligned}$$

Označíme pro $X \subseteq \{1, \dots n\}$ A_X podmatici A se sloupci indexovanými X.

Upravíme $Ax = b$ tak, že $A_B = I_m$. Tento stav si budeme udržovat.

Definice 5. **Báze** je množina indexů proměnných $B \subseteq \{1, \dots n\}$ taková, že A_B je regulární. (= Báze má správný počet prvků $\text{rank}(A_B) = \text{rank}(A)$.)

Definice 6. **Bázické řešení** je řešení odpovídající bázi B, tj. že $x_i = 0$ pro $i \notin B$.

Definice 7. **Přípustná báze** je taková, že odpovídající bázické řešení je přípustné.