NOPT048: Optimalizační metody - LS 2012 Jiří Sgall

Stěny mnohostěnu, minimální popis mnohostěnu

16. 3. 2012, 4. přednáška *Zapsal: Václav Obrázek*

Poslední změna: 16. června 2012

1 Mnohostěny

1.1 Stěna mnohostěnu

Definice 1. Nechť P je konvexní mnohostěn a $c \in \mathbb{R}^n, t \in \mathbb{R}$. Jestliže $\forall x \in P : c^T x \leq t$ a $\exists x \in P : c^T x = t$, pak množinu $\{x | c^T x = t\}$ nazýváme **tečná nadrovina**, množiny $\{x | c^T x = t\} \cap P$, $\emptyset$ a P nazýváme **stěnami** P. Stěnu F, pro kterou platí $F \neq P$ a $F \neq \emptyset$, nazveme **vlastní stěna**.

Definice 2. Vrchol P je stěna dimenze 0.
Hrana P je stěna dimenze 1.
Faseta P je stěna dimenze $\dim(P) - 1$

Věta 3. *Průnik stěn P je stěna P.*

Důkaz. Na cvičeních. □

Věta 4. *Nechť P je konvexní mnohostěn, V množina vrcholů P.*
Pak $x \in V \Leftrightarrow \underbrace{x \notin \operatorname{conv}(P \setminus \{x\})}_{x \text{ je extremální bod}}$.
Navíc, pokud je P omezený, tak $P = \operatorname{conv}(V)$.

Důkaz. (Pro V omezené)
$V_0 :=$ minimální množina (vzhledem k inkluzi), že $P = \operatorname{conv}(V_0)$
$V_{ext} := \{x \in P | x \notin \operatorname{conv}(P \setminus \{x\})\}$
Idea důkazu: $V \subseteq V_{ext} \subseteq V_0 \subseteq V \Rightarrow V_{ext} = V_0$

$V \subseteq V_{ext}$ Sporem, volíme $z \in V, z \notin V_{ext}$
Z definice vrcholu $z \in P, c^T z = t$ a $\forall x \in P \setminus \{z\} : c^T x < t$
$z \notin V_{ext} \Rightarrow z \in \operatorname{conv}(\underbrace{\{x_1, \dots x_k\}}_{\subseteq P \setminus \{z\}}) \Rightarrow$ spor, z není vrchol.

$V_{ext} \subseteq V_0$ Sporem, volíme $z \in V_{ext} \setminus V_0$
$z \in P = \operatorname{conv}(V_0) \subseteq \operatorname{conv}(P \setminus \{z\})$ spor

$V_0 \subseteq V$ Použijeme Větu o oddělování
$z \in V_0, D := \operatorname{conv}(V_0 \setminus \{z\})$; $\{z\}$ a D jsou disjunktní uzavřené konvexní množiny. Tedy podle věty o oddělování máme c, r takové, že $\forall x \in D : c^T x < r$ a $c^T z > r$
Zvolíme $t := c^T z$, pak platí $\forall x \in D : c^T x < r < t$
a tedy $A = \{x | c^T x = t\}$ je tečná nadrovina, tedy $\forall x \in V_0 : c^T x \leq t$ a $\forall x \in P : c^T x \leq t$
Tvrdíme: $A \cap P = \{z\}$, nechť $z' \in A \cap P; z' \neq z$, pak

$z' \in \alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_k x_k + \alpha_0 z$, kde $x_1 \ldots x_k \in V_0 \setminus \{z\}$, $\alpha_i \geq 0$, $\sum \alpha_i = 1$.
$z' \neq z \Rightarrow \alpha_0 < 1 \Rightarrow \exists i : \alpha_i > 0$

$$\begin{array}{cc}
c^T x_1 \leq t & \cdot\alpha_1 \\
\vdots & \\
c^T x_i < t & \cdot\alpha_i \\
\vdots & \\
c^T x_k \leq t & \cdot\alpha_k \\
c^T z = t & \cdot\alpha_0 \\
\hline
c^T z' < t & \text{spor s volbou } z'
\end{array}$$

□

Věta 5. *Stěna stěny je stěna*
Nechť $E \subseteq F$, F stěna konvexního mnohostěnu P. Pak E je stěna $F \Leftrightarrow E$ je stěna P.

Důkaz. $\Leftarrow$ $E = P \cap A$, kde A je tečná nadrovina.
$F \cap A = P \cap A = E$

$\Rightarrow$ (pro P omezené)
F definováno $F := \{x \in P | c^T x = t\}$ a platí $x \in P : c^T x \leq t$.
Jelikož E je stěna F, $E = \{x \in F | d^T x = r\}$ a platí $x \in F : d^T x \leq r$.
Vezmeme rovinu $A_\alpha = \{x | d^T x + \alpha c^T x = r + \alpha t\}$, platí $\forall \alpha > 0 : E \subseteq A_\alpha$
V vrcholy P

$$\begin{array}{ll}
\forall x \in V \setminus E & d^T x + \alpha c^T x < r + \alpha t \\
\forall x \in F \setminus E & d^T x + \alpha c^T x < r + \alpha t \\
\forall x \in P \setminus F & c^T x < t, \text{ ale } d^T x \gtreqless r
\end{array}$$

Zvolíme dostatečně velké α, pro každé x existuje vhodné, vezmeme největší.
$\forall x \in P \setminus E : d^T x + \alpha c^T x < r + \alpha t$

□

Konvexní mnohostěn $\longleftrightarrow$ přípustná řešení LP
stěna mnohostěnu $\longleftrightarrow$ množina optimálních řešení při maximalizaci $c^T x$

1.2 Minimální popis mnohostěnu

(*) $P = \{x \in \mathbb{R} | A' x = b' \wedge A'' x \leq b''\}$, kde rovnic je m' a nerovnic m''

Definice 6. (*) je **minimální popis mnohostěnu** P pokud

- Nemůžeme vynechat žádnou rovnost nebo nerovnost bez změny P
- Nemůžeme změnit žádnou nerovnost na rovnost bez změny P

Pozorování 7. *V minimálním popisu platí* $\operatorname{rank}(A') = m'$.

Pozorování 8. *Nechť $z \in P$ splňuje $A''z < b''$, pak*

- $\dim(P) = n - \operatorname{rank}(A')$
- *z neleží v žádné vlastní stěně P.*

Důkaz. Obrázkem. □

Pozorování 9. *V minimálním popisu existuje z, pro které platí $A''z < b''$.*

Důkaz. Pro každou nerovnici existuje takové z_i, vezmeme těžiště (konvexní obal se stejnou vahou bodů). □