NOPT048: Optimalizační metody - LS 2012	Jiří Sgall
Konvexní mnohostěny, věta Minkowski-Weyl	
9. 3. 2012, 3. přednáška	*Zapsal: Karel Havlík*
Poslední změna: 16. června 2012	

1 Konvexní mnohostěny

Definice 1. Nadrovina v $\mathbb{R}^n$ je množina všech x takových, že $\{x \in \mathbb{R}^n | a^T x = b\}$ pro $a \in \mathbb{R}^n, a \neq \vec{0}, b \in \mathbb{R}$.

Definice 2. Poloprostor v $\mathbb{R}^n$ je množina všech x takových, že $\{x \in \mathbb{R}^n | a^T x \leq b\}$ pro $a \in \mathbb{R}^n, a \neq \vec{0}, b \in \mathbb{R}$.

Definice 3. Konvexní mnohostěn (polyedr) v $\mathbb{R}^n$ je průnik konečně mnoha poloprostorů.

Definice 4. Omezený konvexní mnohostěn je omezený.

Věta 5 (o oddělování)**.** *Nechť C, $D \subseteq \mathbb{R}^n$ jsou uzavřené, konvexní a disjunktní a C je omezená. Pak existuje nadrovina $\{x | a^T x = b\}$, která silně odděluje C a D, tj. taková, že $C \subseteq \{x | a^T x < b\}$ a $D \subseteq \{x | a^T x > b\}$.*

Důkaz. Vezmeme $c \in C$, $d \in D$ tak, že jejich vzdálenost ($||c - d||$) je minimální. To uděláme tak, že vezmeme nějaké $d' \in D$ a protože C je kompaktní, tak obsahuje nejvzdálenější bod od d'. Tento bod označme jako c', vzdálenost $||c' - d'||$ označme jako α a $max_{c \in C} ||c - c'||$ označme jako β. Uvažujme kouli se středem v c' a s poloměrem $\alpha + \beta$, její průnik s množinou D bude tedy kompaktní podmnožina D a ze dvou kompaktních množin už dokážeme vybrat dva nejbližší body c a d. Potom označme $\vec{a} = d - c$ a $b = a^T \left(\frac{c+d}{2}\right)$. Pak platí

$$a^T c < b < a^T d \qquad \text{nebo} \qquad a^T c > b > a^T d$$

$$\forall c' \in C : a^T c' \leq a^T c \qquad\qquad \forall c' \in C : a^T c' \geq a^T c$$

□

Věta 6 (Minkowski-Weyl)**.** *Nechť $X \subseteq \mathbb{R}^n$, pak X je omezený konvexní mnohostěn právě tehdy když existuje $V \subseteq \mathbb{R}^n$ tak, že V je konečná a $X = \operatorname{conv}(V)$.*

Důkaz. "$\Rightarrow$": indukcí podle dimenze X (označme jako d)

(i) $\dim(X) \leq 0$ platí (když $|X| = 1$ tak zvol $V := X$)

(ii) Nechť A je afinní prostor dimenze d, $A \supseteq X$. Pak nerovnice z popisu X označíme jako $a_i^T x \leq b_i$. Když $R = \{x | a_i^T x = b_i\} \not\supseteq X$, tak označíme $X_i := X \cap R$. Potom $\dim(X_i) = \dim(R \cap A) \leq d - 1$ (toto platí, protože když je jeden afinní prostor ostře obsažen v druhém, pak má menší dimenzi). Vezměme konečnou množinu V_i takovou, že $X_i = \operatorname{conv}(V_i)$. Pak hledaná množina V je $V := \bigcup_i V_i$. Abychom dokázali, že toto platí, musíme dokázat, že $\forall x \in X : x \in \operatorname{conv}(V)$. Zvolme přímku p tak, že $x \in p$, $p \subseteq A$. X je omezená, proto musí na přímce p existovat body x' a x" které nejsou v X. Zvolíme $\bar{x}$:

(a) vezmeme první i takové, že $a_i^T x < b_i$ a $a_i^T x' > b_i$

(b) za $\bar{x}$ vezmeme nejbližší bod k x takový, že $\bar{x} \in p$ a $a_i^T \bar{x} = b$.

$\bar{\bar{x}}$ zvolíme analogicky pro j-tou nerovnost.
Nyní platí $\bar{x} \in X_i$, $\bar{\bar{x}} \in X_j$, tedy $\bar{x} \in \mathrm{conv}(V_i)$, $\bar{\bar{x}} \in \mathrm{conv}(V_j)$ a $x \in \mathrm{conv}(\{\bar{x}, \bar{\bar{x}}\})$. Z toho plyne, že $x \in \mathrm{conv}(V)$.

"$\Leftarrow$":
Platí, že $\forall x | x \notin \mathrm{conv}(V)$ existuje oddělující nadrovina, tj. existují $\alpha \in \mathbb{R}^n, \alpha \neq 0, \beta \in \mathbb{R}$ tak, že $\alpha^T x > \beta$ a $\forall v \in V : \alpha^T v \leq \beta$
Dále platí:

(*) Pokud $x_1, \ldots, x_k$ splňují nerovnost $\Rightarrow$ konvexní kombinace ji také splňují.

(**) Pokud x splňuje nerovnosti $\Rightarrow$ splňuje i jejich nezáporné lineární kombinace.

Označíme $Q = \left\{ \binom{\alpha}{\beta} | \alpha \in [-1,1]^n, \beta \in [-1,1], \forall v \in V : \alpha^T v \leq \beta \right\}$, tedy platí že Q je omezená a Q je konvexní mnohostěn. Pro každé $\binom{\alpha}{\beta} \in Q$ platí:

- $-1 \leq \alpha_i \leq 1 \qquad \forall i$
- $-1 \leq \beta \leq 1$
- $\alpha^T v_i \leq \beta \qquad \forall v_i \in V \qquad$ neboli $\qquad v_i^T \alpha - \beta \leq 0$

Zvolíme W takové, že $Q = \mathrm{conv}(W)$, a chceme dokázat, že

$$X = \left\{ x | \forall \tbinom{\alpha}{\beta} \in W : \alpha^T x \leq \beta \right\}$$

Když toto dokážeme, tak víme, že X je průnik konečně mnoha poloprostorů.
"$\subseteq$": $V \subseteq X$ z definice Q (díky (*) a (**)), tedy $\mathrm{conv}(V) \subseteq X$.
"$\supseteq$": chceme dokázat, že když $x \notin X$ tak existuje takové $\binom{\alpha}{\beta} \in W$, že $\alpha^T x > \beta$. Pokud $x \notin X$, pak platí $\exists \binom{\alpha}{\beta} \in Q : \alpha^T x > \beta$ a toto $\binom{\alpha}{\beta}$ je konvexní kombinací $\binom{\alpha_i}{\beta_i} \in W$. Tudíž existuje $\binom{\alpha_i}{\beta_i} \in W$ takové, že $\alpha_i^T x > \beta_i$ (díky (**)). $\square$

Definice 7. $C \subseteq \mathbb{R}^n$ je kužel, pokud C je uzavřený na nezáporné lineární kombinace.

Definice 8. $C \subseteq \mathbb{R}^n$ je polyedrální kužel, pokud C je konvexní mnohostěn a kužel.

Věta 9. *C je polyedrální kužel právě tehdy když C je obal konečně mnoha vektorů (obalem se rozumí množina všech nezáporných kombinací).*

Věta 10. *Každý polyedr P lze vyjádřit jako $P = Q + C$, kde Q je polytop a C polyedrální kužel.*